

7 класс

1. Кроме привычной нам температурной шкалы Цельсия есть температурная шкала Фаренгейта. Повышение температуры на 1 градус Цельсия означает ее повышение на 1,8 градуса Фаренгейта. Известно, что 10° по Цельсию и 50° по Фаренгейту — одна и та же температура. Какая температура выражается одинаковым числом градусов и по Цельсию, и по Фаренгейту?

2. В турнире матбоев участвовали 50 команд. Соревнования проходили в один круг (то есть каждая команда сыграла с каждой по одному разу), и в каждом туре играли все команды. Могло ли так случиться, что после 25 туров у 25 команд было по 25 побед?

3. На плоскости отмечены $n \geq 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая из отмеченных точек окрашена в один из трёх цветов, причём в каждый цвет окрашена хотя бы одна точка. Докажите, что существует треугольник с вершинами трёх разных цветов, внутри которого нет отмеченных точек.

4. Для чисел x , y , z и k выполняются соотношения

$$\frac{7}{x+y} = \frac{k}{x+z} = \frac{11}{z-y}$$

Найдите k .

5. В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа, сумма которых нечетна. Докажите, что можно найти уголок из трех клеток, сумма чисел в которых нечетна.

6. Сумма 100 целых чисел равна нулю. Докажите, что из них можно по крайней мере 99 способами выбрать два числа, сумма которых неотрицательна.

7. Найдите все такие простые числа p , что $2p + 1$ — куб натурального числа.

8. Каждый ученик класса занимается в двух кружках, и для каждого трех учеников есть кружок, в который они ходят вместе. Докажите, что имеется кружок, в котором занимаются все ученики.

В каждой задаче, где требуется отыскать ответ, следует найти все возможные ответы и доказать, что других нет. Если в задаче нужно найти наименьшее значение какой-то величины, то, кроме ответа, нужно предъявить пример, когда величина принимает такое значение, и доказать, что меньше она быть не может. Рассуждения в решении должны быть проведены полностью, а утверждения — обоснованы.