Частное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 36 открытого акционерного общества «Российские железные дороги»
Байкальская физико-математическая школа

# Байкальский межрегиональный математический турнир
# Отборочный этап
# 8 -10 января 2021 г.
# Лига ABCD

г. Иркутск

**Матбой №1ABC**

1. В клетки квадрата $3 \times 3$ записаны числа от 1 до 9 (все числа взяты по одному разу). Могут ли суммы чисел во всех строках и столбцах быть простыми числами?
2. Доктор Айболит взвешивает на своих весах воробьев и ласточек. 4 воробья оказались тяжелее 6 ласточек. Когда доктор Айболит поменял местами одного воробья и одну ласточку, то веса сравнялись. Сколько весит воробей и сколько ласточка, если общий вес 4 воробьев и 6 ласточек равен 266 г? (Все воробьи весят одинаково, и все ласточки весят одинаково).
3. Маша и Саша играют в настольную игру. Они по очереди кидают по три кубика (на каждом точки от 1 до 6) и ходят вперед на столько клеток, сколько выпало в сумме на трех кубиках. Маша кидает первая. В какой-то момент игры (после хода Маши или Саши) Маша продвинулась вперед на 14 клеток, а Саша на 46 клеток. Могла ли Маша выбросить шестерку хотя бы один раз на одном из кубиков?
4. Может ли произведение нескольких последовательных натуральных чисел оканчиваться на 5678?
5. На клетчатой плоскости закрашена центральная клетка квадрата $13\times13$. Каждую минуту закрашиваются все клетки, граничащие по стороне с уже закрашенной клеткой. Через какое наименьшее время квадрат будет полностью закрашен?
6. Прямоугольник, состоящий из целого числа клеток, называется «*красивым*», если одна сторона на 3 единицы больше другой. Можно ли в прямоугольник $7\times15$ клеток поместить без наложений 26 «*красивых*» прямоугольников?

**Матбой №1ABC**

1. В клетки квадрата $3 \times 3$ записаны числа от 1 до 9 (все числа взяты по одному разу). Могут ли суммы чисел во всех строках и столбцах быть простыми числами?
2. Доктор Айболит взвешивает на своих весах воробьев и ласточек. 4 воробья оказались тяжелее 6 ласточек. Когда доктор Айболит поменял местами одного воробья и одну ласточку, то веса сравнялись. Сколько весит воробей и сколько ласточка, если общий вес 4 воробьев и 6 ласточек равен 266 г? (Все воробьи весят одинаково, и все ласточки весят одинаково).
3. Маша и Саша играют в настольную игру. Они по очереди кидают по три кубика (на каждом точки от 1 до 6) и ходят вперед на столько клеток, сколько выпало в сумме на трех кубиках. Маша кидает первая. В какой-то момент игры (после хода Маши или Саши) Маша продвинулась вперед на 14 клеток, а Саша на 46 клеток. Могла ли Маша выбросить шестерку хотя бы один раз на одном из кубиков?
4. Может ли произведение нескольких последовательных натуральных чисел оканчиваться на 5678?
5. На клетчатой плоскости закрашена центральная клетка квадрата $13\times13$. Каждую минуту закрашиваются все клетки, граничащие по стороне с уже закрашенной клеткой. Через какое наименьшее время квадрат будет полностью закрашен?
6. Прямоугольник, состоящий из целого числа клеток, называется «*красивым*», если одна сторона на 3 единицы больше другой. Можно ли в прямоугольник $7\times15$ клеток поместить без наложений 26 «*красивых*» прямоугольников?

## Матбой №1ABC

1. *В клетки квадрата 3 × 3 записаны числа от 1 до 9 (все числа взяты по одному разу). Могут ли суммы чисел во всех строках и столбцах быть простыми числами?*

**Ответ:** могут.

**Решение.** Пример на рисунке. Примеры могут быть другими.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 7 | 3 | 9 |
| 5 | 8 | 6 |

2. *Доктор Айболит взвешивает на своих весах воробьев и ласточек. 4 воробья оказались тяжелее 6 ласточек. Когда доктор Айболит поменял местами одного воробья и одну ласточку, то веса сравнялись. Сколько весит воробей и сколько ласточка, если общий вес 4 воробьев и 6 ласточек равен 266 г? (Все воробьи весят одинаково, и все ласточки весят одинаково).*

**Ответ:** ласточка – 19 г, воробей – 38 г.

**Решение.** Из условия: 3В + 1Л = 1В + 5Л и 4В + 6Л = 266. Тогда 2В = 4Л или В = 2Л. Подставим во второе равенство: 8Л + 6Л = 266, тогда Л = 19. Тогда В = 38.

3. *Маша и Саша играют в настольную игру. Они по очереди кидают по три кубика (на каждом точки от 1 до 6) и ходят вперед на столько клеток, сколько выпало в сумме на трех кубиках. Маша кидает первая. В какой-то момент игры (после хода Маши или Саши) Маша продвинулась вперед на 14 клеток, а Саша на 46 клеток. Могла ли Маша выбросить шестерку хотя бы один раз на одном из кубиков?*

**Ответ:** могла.

**Решение.** За один бросок можно получить от 3 до 18 очков. Тогда Саша сделал не меньше 3 бросков ($2 \cdot 18 = 36 < 46$), тогда и Маша сделала не меньше трёх бросков, так как бросала раньше Саши. Возможные броски Маши 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 6. Возможные Броски Саши – любые, дающие в сумме 46 очков. Если приведён правильный набор бросков, при котором у Маши выпадает шестерка – это можно считать решением.

4. *Может ли произведение нескольких последовательных натуральных чисел оканчиваться на 5678?*

**Ответ:** не может.

**Решение.** Докажем, что последняя цифра не может быть 8. Если чисел два, то последняя цифра определяется по таблице (как остаток от произведения):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Последняя цифра первого числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Последняя цифра произведения | 0 | 2 | 6 | 2 | 0 | 0 | 2 | 6 | 2 | 0 |

Если чисел три, то последняя цифра определяется по таблице:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Последняя цифра первого числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Последняя цифра произведения | 0 | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 0 | 0 |

Если чисел четыре, то последняя цифра определяется по таблице:

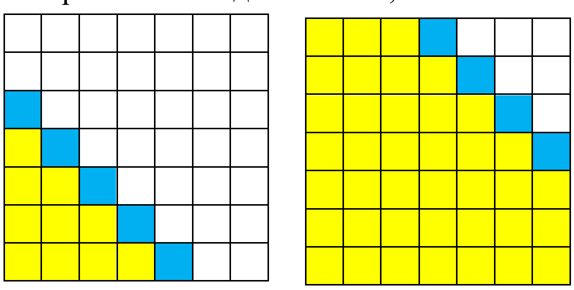
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Последняя цифра первого числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Последняя цифра произведения | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 |

Если чисел 5 – то последняя цифра всегда 0.

5. *На клетчатой плоскости закрашена центральная клетка квадрата 13×13. Каждую минуту закрашиваются все клетки, граничащие по стороне с уже закрашенной клеткой. Через какое наименьшее время квадрат будет полностью закрашен?*

**Ответ:** через 12 минут.

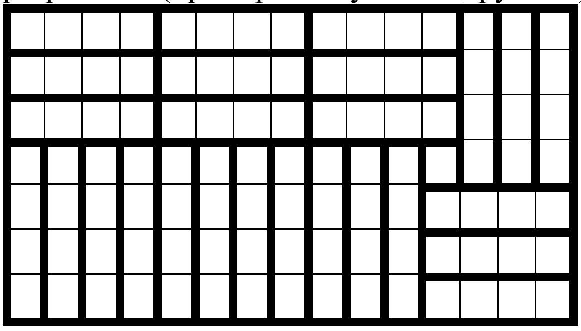
**Решение.** Рассмотрим клетки, лежащие правее и выше центральной клетки. В этом квадрате 7 × 7 есть 13 параллельных диагоналей, в том числе из 1 клетки. Очевидно, что заполнение такого квадрата не зависит от заполнения остальной части и заполнение всех таких квадратов закончится одновременно. Каждая следующая диагональ заполняется только на следующем ходе и заполняется полностью. Поэтому через 12 минут весь квадрат 7 × 7, а значит, весь первоначальный квадрат, будут заполнены.



6. *Прямоугольник, состоящий из целого числа клеток, называется «красивым», если одна сторона на 3 единицы больше другой. Можно ли в прямоугольник 7×15 клеток поместить без наложений 26 «красивых» прямоугольников?*

**Ответ:** можно.

**Решение.** Самый маленький из возможных прямоугольников $1 \times 4$. Тогда площадь всех прямоугольников не меньше, чем $4 \times 26 = 104$ клетки. В прямоугольнике $7 \times 15 = 105$ клеток. Значит, если можно поместить 26 прямоугольников, то все они $1 \times 4$ и остается 1 клетка. Пример такого разрезания (примеры могут быть другими):



## Матбой №1D

1. *ABCD* – квадрат. Точки *N* и *F* на сторонах *AD* и *DC* такие, что *AN* : *ND* = 1 : 2, *CF* : *FD* = 2 : 1. Отрезки *BN* и *AF* пересекаются в точке *P*. Какую часть площади квадрата занимают треугольник *ABP* и четырехугольник *NPFD* вместе взятые?
2. Докажите, что $\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}\geq 12$, если $a$, $b$, $c$ и $d$ – положительные числа.
3. Можно ли расположить на плоскости семь прямых линий так, чтобы среди точек их пересечения было хотя бы 6, в которых пересекаются ровно три из этих прямых, а также хотя бы 4, в которых пересекаются ровно две из этих прямых?
4. Можно ли расставить ниже главной диагонали доски 2021 × 2021 не бьющих друг друга 2019 ферзей?
5. Найдите все нечетные натуральные числа вида $\frac{p+q}{p-q}$, где $p$ и $q$ – простые числа.
6. На поверхности кубика с ребром 2 отмечены зелёным все вершины, середины ребер и центры граней. Кузнечик может перепрыгнуть из зелёной точки в другую зелёную точку, находящуюся на расстоянии ровно 1. Может ли кузнечик выпрыгнуть из какой-то зелёной точки, посетить ровно по одному разу все остальные и вернуться в исходную?

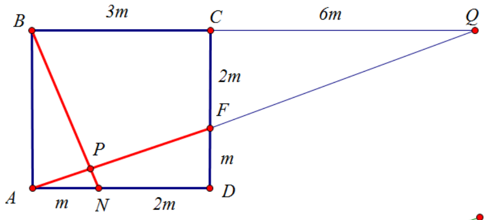

## Матбой №1D

1. *ABCD* – квадрат. Точки *N* и *F* на сторонах *AD* и *DC* такие, что *AN* : *ND* = 1 : 2, *CF* : *FD* = 2 : 1. Отрезки *BN* и *AF* пересекаются в точке *P*. Какую часть площади квадрата занимают треугольник *ABP* и четырехугольник *NPFD* вместе взятые?
2. Докажите, что $\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}\geq 12$, если $a$, $b$, $c$ и $d$ – положительные числа.
3. Можно ли расположить на плоскости семь прямых линий так, чтобы среди точек их пересечения было хотя бы 6, в которых пересекаются ровно три из этих прямых, а также хотя бы 4, в которых пересекаются ровно две из этих прямых?
4. Можно ли расставить ниже главной диагонали доски 2021 × 2021 не бьющих друг друга 2019 ферзей?
5. Найдите все нечетные натуральные числа вида $\frac{p+q}{p-q}$, где $p$ и $q$ – простые числа.
6. На поверхности кубика с ребром 2 отмечены зелёным все вершины, середины ребер и центры граней. Кузнечик может перепрыгнуть из зелёной точки в другую зелёную точку, находящуюся на расстоянии ровно 1. Может ли кузнечик выпрыгнуть из какой-то зелёной точки, посетить ровно по одному разу все остальные и вернуться в исходную?

# Матбой №1D

1. *ABCD – квадрат. Точки N и F на сторонах AD и DC такие, что AN : ND = 1 : 2, CF : FD = 2 : 1. Отрезки BN и AF пересекаются в точке P. Какую часть площади квадрата занимают треугольник ABP и четырехугольник NPFD вместе взятые?*

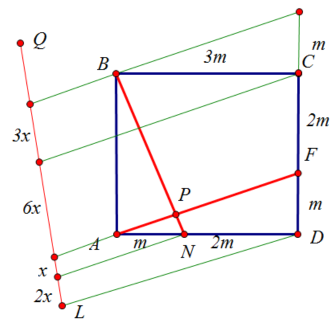
**Ответ:** 3/10.




**Решение**. Пусть $S_{ABCD} = S$. Тогда $S_{ABN}$ = $S_{AFD}$ = $S$/6, следовательно, $S_{ABP}$ = $S_{NPFD}$. Задача сводится к нахождению отношения $BP : BN$.

<u>Способ 1.</u> Метод бантиков (8 кл). Из подобия $AFD$ и $CFQ$ следует, что $CQ = 6m$. Из подобия $APN$ и $BPQ$ следует, что $BP : PN = 9 : 1$ или $BP : BN = 9 :10$. Тогда $S_{ABP} = 9S_{ABN}/10 = 3S/20$. $2S_{ABP} = 6S/20 = 3S/10$.

<u>Способ 2.</u> Метод паспортной прямой (7-8кл). Проведем прямую $QL$ и из точек $N, D, C$ и $B$ отрезки, параллельные прямой $AF$ до пересечения с $QL$. Применив теорему о пропорциональных отрезках, получим на прямой $QL$ (паспортная прямая) отрезки с известными отношениями. $BP : PN = 9x : x$ или $BP : BN = 9 :10$. Тогда $S_{ABP} = 9S_{ABN} /10 = 3S/20$. $2S_{ABP} = 6S/20 = 3S/10$.




2. *Докажите, что* $\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}\geq 12$, *если a, b, c и d – положительные числа.*

**Решение.** Разобьём левую часть на 12 дробей и сгруппируем вместе взаимнообратные дроби.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$$

По неравенству Коши получаем для каждой пары неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$. Складывая шесть таких неравенств, получаем нужное неравенство.

3. *Можно ли расположить на плоскости семь прямых линий так, чтобы среди точек их пересечения было хотя бы 6, в которых пересекаются ровно три из этих прямых, а также хотя бы 4, в которых пересекаются ровно две из этих прямых?*

**Ответ:** Нет.

**Решение.** Пусть такое возможно. Посчитаем количество пар прямых. С одной стороны, их не более $7 \cdot 6/2 = 21$. С другой стороны, их не менее $6 \cdot 3 + 4 = 22$ – противоречие.

4. *Можно ли расставить ниже главной диагонали доски 2021 × 2021 не бьющих друг друга 2019 ферзей?*

**Решение.** В каждой диагонали, параллельной главной, не более 1 ферзя. Всего диагоналей 2020. Кроме того, в наименьших 4 диагоналях в совокупности не более 2 ферзей (небольшой перебор). Отсюда получаем искомую оценку, что ферзей не более 2018.

5. *Найдите все нечетные натуральные числа вида* $\frac{p+q}{p-q}$, *где p и q – простые числа.*

**Ответ:** Только 5.

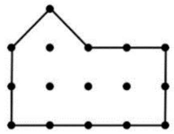
**Решение.** Поскольку $\frac{p+q}{p-q}$ должно быть натуральным числом, то $p > q$ и $p + q \vdots p - q$. Тогда $(p + q) + (p - q) \vdots p - q$ или $2p \vdots p - q$. Делители у числа $2p$ – это 1, 2, $p$ и $2p$. Так как $p - q < p$, то или $p - q = 1$, или $p - q = 2$. Если $p - q = 1$, то $p = 3$, $q = 2$, откуда получаем ответ 5. Если $p - q = 2$, то $p$ и $q$ – последовательные, а потому нечётные простые числа, но тогда их полусумма $\frac{p+q}{2}$ – это чётное число (между ними).

6. *На поверхности кубика с ребром 2 отмечены зелёным все вершины, середины ребер и центры граней. Кузнечик может перепрыгнуть из зелёной точки в другую зелёную точку, находящуюся на расстоянии ровно 1. Может ли кузнечик выпрыгнуть из какой-то зелёной точки, посетить ровно по одному разу все остальные и вернуться в исходную?*

**Ответ:** Нет, не может.

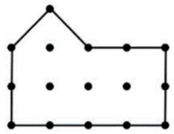
**Решение.** Покрасим все зелёные точки в шахматном порядке в белый и чёрный цвета, притом вершины кубика – в белый. Тогда белыми будут все 8 вершин кубика и все 6 центров граней, а чёрными – 12 середин рёбер. Поскольку при движении белые и чёрные точки должны чередоваться, то для того, чтобы обойти их все по разу, их должно быть поровну, что не так.

**Матбой №2ABC**



1. Васе на день рождения испекли торт (на рисунке). Он не знает, сколько гостей смогут к нему прийти – 2, 5 или 8. Можно ли разрезать этот торт на 3, 6 и 9 равных частей?
2. В волшебной стране цифры 2 и 5 считаются несчастливыми и их не используют в нумерации домов. Если построенный дом попадает на номер с плохой цифрой, то номер просто пропускают и выбирают ближайший неиспользованный номер, состоящий только из хороших цифр. На главной улице 2021 дом. Верно ли, что есть два дома, произведение номеров которых равно 2021?
3. В зале заседаний Конгресса Острова рыцарей и лжецов сидели 2021 конгрессмен. В какой-то момент один конгрессмен вышел. Один из оставшихся, поглядев ему вслед, заметил: «Ушедший – лжец!» После чего встал и тоже вышел. Второй сказал: «Оба ушедшие – лжецы» и тоже ушел. Далее каждый из оставшихся уходил, говоря: «Все ушедшие – лжецы». Пока последний оставшийся в зале печально не констатировал: «Да, все ушедшие – лжецы». Определите, сколько в зале было лжецов первоначально. (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду).
4. Игрушку Кубарик можно распилить одним разрезом на один кубик 2×2×2 и один кубик 3×3×3 (кубики соединены по фигуре ненулевой площади). Какова может быть площадь поверхности Кубарика, если известно, что она является натуральным числом?
5. На доске в ряд по возрастанию записаны пять простых чисел. Каждые два соседних числа отличаются на 6. Какое число может стоять на первом месте?
6. Трехзначное число разделили на сумму его цифр. Какое наименьшее натуральное число могло получиться?

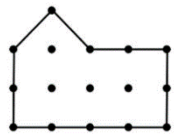
**Матбой №2ABC**



1. Васе на день рождения испекли торт (на рисунке). Он не знает, сколько гостей смогут к нему прийти – 2, 5 или 8. Можно ли разрезать этот торт на 3, 6 и 9 равных частей?
2. В волшебной стране цифры 2 и 5 считаются несчастливыми и их не используют в нумерации домов. Если построенный дом попадает на номер с плохой цифрой, то номер просто пропускают и выбирают ближайший неиспользованный номер, состоящий только из хороших цифр. На главной улице 2021 дом. Верно ли, что есть два дома, произведение номеров которых равно 2021?
3. В зале заседаний Конгресса Острова рыцарей и лжецов сидели 2021 конгрессмен. В какой-то момент один конгрессмен вышел. Один из оставшихся, поглядев ему вслед, заметил: «Ушедший – лжец!» После чего встал и тоже вышел. Второй сказал: «Оба ушедшие – лжецы» и тоже ушел. Далее каждый из оставшихся уходил, говоря: «Все ушедшие – лжецы». Пока последний оставшийся в зале печально не констатировал: «Да, все ушедшие – лжецы». Определите, сколько в зале было лжецов первоначально. (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду).
4. Игрушку Кубарик можно распилить одним разрезом на один кубик 2×2×2 и один кубик 3×3×3 (кубики соединены по фигуре ненулевой площади). Какова может быть площадь поверхности Кубарика, если известно, что она является натуральным числом?
5. На доске в ряд по возрастанию записаны пять простых чисел. Каждые два соседних числа отличаются на 6. Какое число может стоять на первом месте?
6. Трехзначное число разделили на сумму его цифр. Какое наименьшее натуральное число могло получиться?

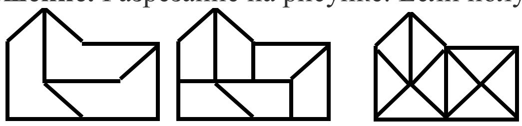
## Матбой №2ABC

1. *Васе на день рождения испекли торт (на рисунке). Он не знает, сколько гостей смогут к нему прийти – 2, 5 или 8. Можно ли разрезать этот торт на 3, 6 и 9 равных частей?*



**Ответ:** можно.

**Решение.** Разрезание на рисунке. Если получен 1 случай – 4 балла, 2 случая – 6 баллов.



2. *В волшебной стране цифры 2 и 5 считаются несчастливыми и их не используют в нумерации домов. Если построенный дом попадает на номер с плохой цифрой, то номер просто пропускают и выбирают ближайший неиспользованный номер, состоящий только из хороших цифр. На главной улице 2021 дом. Верно ли, что есть два дома, произведение номеров которых равно 2021?*

**Ответ:** верно.

**Решение:** $2021 = 43 \times 47$.

3. *В зале заседаний Конгресса Острова рыцарей и лжецов сидели 2021 конгрессмен. В какой-то момент один конгрессмен вышел. Один из оставшихся, поглядев ему вслед, заметил: «Ушедший – лжец!» После чего встал и тоже вышел. Второй сказал: «Оба ушедшие – лжецы» и тоже ушел. Далее каждый из оставшихся уходил, говоря: «Все ушедшие – лжецы». Пока последний оставшийся в зале печально не констатировал: «Да, все ушедшие – лжецы». Определите, сколько в зале было лжецов первоначально. (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду).*

**Ответ:** 2020.

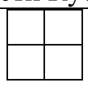
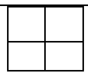
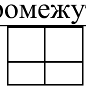
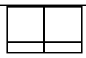
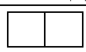
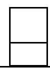
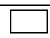
**Решение.** Если хоть кто-то сказал правду, то все перед ним были лжецами, а он сам – рыцарем. Следовательно, все остававшиеся после него (если он не последний) тоже лжецы. В этом случае точно есть 1 рыцарь и 2020 лжецов. А если никто не сказал правду, то самый первый ушедший не был лжецом, тогда он рыцарь, а все остальные солгали, и в этом случае снова 2020 лжецов.

Если не рассмотрен случай первого рыцаря – дыра в 4 балла.

4. *Игрушку Кубарик можно распилить одним разрезом на один кубик $2\times2\times2$ и один кубик $3\times3\times3$ (кубики соединены по фигуре ненулевой площади). Какова может быть площадь поверхности Кубарика, если известно, что она является натуральным числом?*

**Ответ:** 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77.

**Решение.** Площадь поверхности кубика $2\times2\times2$ равна $4\times6 = 24$, а кубика $3\times3\times3$ – $9\times6 = 54$. Общая площадь 78. Значит, наибольшая площадь поверхности Кубарика может быть равна 77 (если кубики касаются по половине квадрата $1\times1$). Наименьшая поверхность будет, если кубики касаются по грани меньшего кубика. Тогда площадь поверхности Кубарика 70. Все промежуточные значения площади поверхности достигаются.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Пересечение |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Площадь | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 |

5. *На доске в ряд по возрастанию записаны пять простых чисел. Каждые два соседних числа отличаются на 6. Какое число может стоять на первом месте?*

**Ответ:** 5.

**Решение.** Одно из чисел обязательно делится на 5 (можно проверить по остаткам), поэтому простым оно может быть, только если равно 5. Меньше него на 6 простых чисел не бывает (меньше 0). Больше него числа 11, 17, 23, 29 – действительно простые.

6. *Трехзначное число разделили на сумму его цифр. Какое наименьшее натуральное число могло получиться?*

**Ответ:** 11.

**Решение.** Пример: $198 : 18 = 11$. Оценка. Пусть получится число не больше 10. Тогда $100a + 10b + c \le 10(a + b + c)$. То есть $90a \le 9c$, $10a \le c$. Так как $a$ хотя бы 1, то $c$ – хотя бы 10, так не бывает.

Пример – 6 баллов, оценка – 6 баллов.

**Матбой №2D**

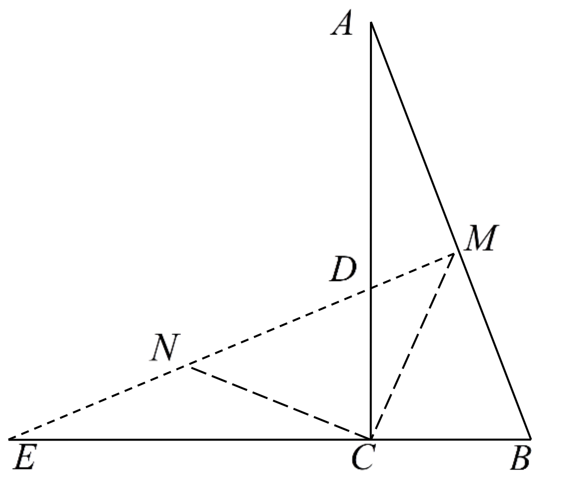
1. Дан прямоугольный треугольник $ABC$, точка $M$ – середина гипотенузы $AB$, точка $D$ выбрана на катете $AC$ так, что $AD > DC$, точка $E$ – точка пересечения прямых $MD$ и $BC$. Оказалось, что $AB = ED$. Докажите, что $\angle ABC = 3\angle BEM$.
2. Докажите, что для всех положительных $a$ выполняется неравенство $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$.
3. На дискотеку пришло 100 человек. Сколькими способами можно установить отношения между участниками дискотеки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) каждые два из них или друзья, или враги; б) если А и В, а также В и С – друзья, то А и С – друзья; в) если А и В, а также В и С – враги, то А и С – друзья; г) если А и В друзья, а В и С – враги, то А и С – враги?
4. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2021. Каждую минуту Вася стирает с доски все неположительные числа, а также все положительные числа, у которых есть хотя бы две совпадающие цифры, а затем все оставшиеся на доске числа уменьшает на 1. Через сколько минут доска впервые окажется пустой?
5. Найдите все пары целых чисел $a$, $b$, для которых $a^2 + b + 2 = a + b^2$.
6. На прямой расположили пронумерованные от 1 до 4041 лампы. Вначале часть ламп горит, остальные не горят. За один ход можно выбрать две лампы с номерами, частное которых является простым числом, и изменить их состояние на противоположное – горящую выключить, не горящую – включить. Можно ли включить все лампы с номерами от 1 до 2021, не зависимо от первоначального набора включённых ламп?

**Матбой №2D**

1. Дан прямоугольный треугольник $ABC$, точка $M$ – середина гипотенузы $AB$, точка $D$ выбрана на катете $AC$ так, что $AD > DC$, точка $E$ – точка пересечения прямых $MD$ и $BC$. Оказалось, что $AB = ED$. Докажите, что $\angle ABC = 3\angle BEM$.
2. Докажите, что для всех положительных $a$ выполняется неравенство $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$.
3. На дискотеку пришло 100 человек. Сколькими способами можно установить отношения между участниками дискотеки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) каждые два из них или друзья, или враги; б) если А и В, а также В и С – друзья, то А и С – друзья; в) если А и В, а также В и С – враги, то А и С – друзья; г) если А и В друзья, а В и С – враги, то А и С – враги?
4. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2021. Каждую минуту Вася стирает с доски все неположительные числа, а также все положительные числа, у которых есть хотя бы две совпадающие цифры, а затем все оставшиеся на доске числа уменьшает на 1. Через сколько минут доска впервые окажется пустой?
5. Найдите все пары целых чисел $a$, $b$, для которых $a^2 + b + 2 = a + b^2$.
6. На прямой расположили пронумерованные от 1 до 4041 лампы. Вначале часть ламп горит, остальные не горят. За один ход можно выбрать две лампы с номерами, частное которых является простым числом, и изменить их состояние на противоположное – горящую выключить, не горящую – включить. Можно ли включить все лампы с номерами от 1 до 2021, не зависимо от первоначального набора включённых ламп?

**Матбой №2D**

1. *Дан прямоугольный треугольник $ABC$, точка $M$ – середина гипотенузы $AB$, точка $D$ выбрана на катете $AC$ так, что $AD > DC$, точка $E$ – точка пересечения прямых $MD$ и $BC$. Оказалось, что $AB = ED$. Докажите, что $\angle ABC = 3\angle BEM$.*




**Решение.** Проведём отрезки $CM$ и $CN$, где $N$ – середина отрезка $ED$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равны отрезки $EN = ND = NC = ED/2 = AB/2 = CM = AM = MB$. Пусть $\angle BEM = \alpha$. Тогда $\alpha = \angle CED = \angle ECN$, тогда $\angle CNM = \angle CMN = 2\alpha$, как внешний угол $\Delta NEC$. Тогда $\angle CBM = \angle MCB = 3\alpha$, как внешний угол $\Delta CME$. Утверждение доказано.

2. *Докажите, что для всех положительных $a$ выполняется неравенство* $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$.

**Решение.** По неравенству Коши получаем

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 2a^{12} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 2\left(a^{12} + \frac{1}{a^4}\right) + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 4a^4 + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq$$
$$\geq 4\left(a^4 + \tfrac{1}{a^2}\right) + \tfrac{8}{a} \geq 8a + \tfrac{8}{a} \geq 8\left(a + \tfrac{1}{a}\right) \geq 8 \cdot 2 = 16.$$

3. *На дискотеку пришло 100 человек. Сколькими способами можно установить отношения между участниками дискотеки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) каждые два из них или друзья, или враги; б) если A и B, а также B и C – друзья, то A и C – друзья; в) если A и B, а также B и C – враги, то A и C – друзья; г) если A и B друзья, а B и C – враги, то A и C – враги?*

**Ответ:** $2^{99}$.

**Решение.** Все люди делятся на две (возможно, пустых) группы, внутри каждой из которых люди друзья, а пары людей из разных групп – враги. При этом любая такая конфигурация подходит. Берём первого человека. Тогда остальные либо входят в группу с ним, либо не входят. Способов так разделить людей на две группы – $2^{99}$.
Доказано, что все люди делятся на две группы – *4 балла*.

4. *На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2021. Каждую минуту Вася стирает с доски все неположительные числа, а также все положительные числа, у которых есть хотя бы две совпадающие цифры, а затем все оставшиеся на доске числа уменьшает на 1. Через сколько минут доска впервые окажется пустой?*

**Ответ:** 11.

**Решение.** Число 10 пропадёт только после 11-го действия. Любое число, больше или равно 11, не более чем за 10 ходов (возможно, за 0 ходов) превратится в число, которое оканчивается на две одинаковые цифры: 00, 11, 22, 33, …, 99, а на следующий ход пропадёт (если не пропало раньше).

5. *Найдите все пары целых чисел $a$, $b$, для которых $a^2 + b + 2 = a + b^2$.*

**Ответ:** (1; 2); (0; – 1); (0; 2); (1; – 1).

**Решение.** Перенесем все кроме 2 в одну часть и разложим на множители: $(b - a)(a + b - 1) = 2$. Возможны 4 случая: 1) $b - a = 1$; $a + b - 1 = 2$; 2) $b - a = -1$; $a + b - 1 = -2$; 3) $b - a = 2$; $a + b - 1 = 1$; 4) $b - a = -2$; $a + b - 1 = -1$. В каждом из случаев система из двух линейных уравнений решается, и получается ответ: $(a; b) = (1; 2); (0; -1); (0; 2); (1; -1)$.
Задача сведена к конечному перебору — *6 баллов*.

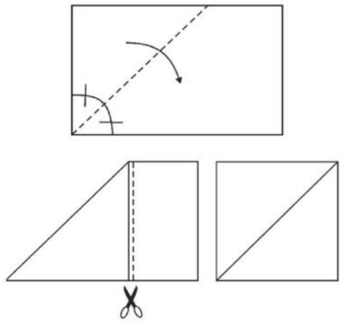
6. *На прямой расположили пронумерованные от 1 до 4041 лампы. Вначале часть ламп горит, остальные не горят. За один ход можно выбрать две лампы с номерами, частное которых является простым числом, и изменить их состояние на противоположное – горящую выключить, не горящую – включить. Можно ли включить все лампы с номерами от 1 до 2021, не зависимо от первоначального набора включённых ламп?*

**Ответ:** можно.

**Решение.** Рассмотрим лампу с номером 2021. Если она не включена, берем вместе с ней лампу 43, и меняем их состояние. А дальше рассмотрим для всех $n$ от 1 до 2020 пары $2n$ и $n$, что позволяет включить все лампы от 1 до 2020.

## Матбой №3ABC

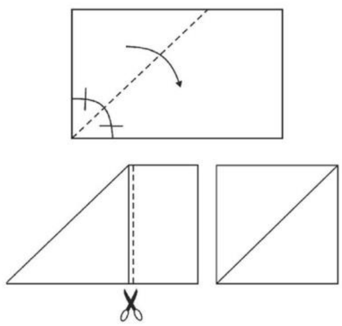
1. В каждой клетке таблицы 5 × 5 записано натуральное число. В любом куске таблицы размером 1 × 3 или 3 × 1 сумма чисел равна 8. Найдите наибольшую сумму всех чисел в таблице.
2. В каждую клетку шахматной доски 8×8 записано натуральное число от 1 до 64, все числа различны. Шахматный король хочет пройти по нескольким клеткам доски (стартовую точку он выбирает сам) так, чтобы в каждой следующей клетке число было больше предыдущего. Какое наибольшее количество клеток он гарантированно может посетить (независимо от расстановки чисел)?
3. Назовем натуральное число *красивым*, если любое натуральное число от 1 до 8 включительно является делителем этого числа, либо числа, получающегося из первоначального перестановкой цифр. Найдите наименьшее *красивое* число.
4. На Острове Рыцарей и Лжецов мальчики всегда лгут, а девочки всегда говорят правду. На этом острове жила семья с тремя детьми. Однажды дети собрались вместе и по очереди сказали: «У меня два брата». «И у меня два брата». «А у меня две сестры». Сколько мальчиков и сколько девочек в этой семье?



5. Оля занимается оригами и ей нужны квадратные листы бумаги. Она взяла прямоугольный лист и стала отрезать от него квадраты, как показано на рисунке. Квадрат она откладывала в стопку с готовыми деталями, а из прямоугольника снова вырезала квадрат по той же схеме. Оля проделала эту операцию 3 раза и получила 3 квадрата и прямоугольник размерами 2 × 3 см. Сколько могло быть различных вариантов первоначального листа бумаги?
6. Петя разбил большой прямоугольник четырьмя отрезками, параллельными одной стороне, и четырьмя отрезками, параллельными другой стороне, на 25 маленьких прямоугольников. Вася задает вопросы Пете, и за один раз может узнать периметр любого из 25 маленьких прямоугольников. Вася хочет узнать сумму периметров всех 25 маленьких прямоугольников. За какое наименьшее количество вопросов он сможет это сделать?

## Матбой №3ABC

1. В каждой клетке таблицы 5 × 5 записано натуральное число. В любом куске таблицы размером 1 × 3 или 3 × 1 сумма чисел равна 8. Найдите наибольшую сумму всех чисел в таблице.
2. В каждую клетку шахматной доски 8×8 записано натуральное число от 1 до 64, все числа различны. Шахматный король хочет пройти по нескольким клеткам доски (стартовую точку он выбирает сам) так, чтобы в каждой следующей клетке число было больше предыдущего. Какое наибольшее количество клеток он гарантированно может посетить (независимо от расстановки чисел)?
3. Назовем натуральное число *красивым*, если любое натуральное число от 1 до 8 включительно является делителем этого числа, либо числа, получающегося из первоначального перестановкой цифр. Найдите наименьшее *красивое* число.
4. На Острове Рыцарей и Лжецов мальчики всегда лгут, а девочки всегда говорят правду. На этом острове жила семья с тремя детьми. Однажды дети собрались вместе и по очереди сказали: «У меня два брата». «И у меня два брата». «А у меня две сестры». Сколько мальчиков и сколько девочек в этой семье?



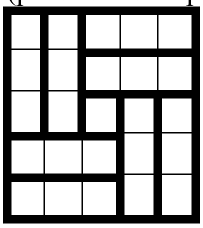
5. Оля занимается оригами и ей нужны квадратные листы бумаги. Она взяла прямоугольный лист и стала отрезать от него квадраты, как показано на рисунке. Квадрат она откладывала в стопку с готовыми деталями, а из прямоугольника снова вырезала квадрат по той же схеме. Оля проделала эту операцию 3 раза и получила 3 квадрата и прямоугольник размерами 2 × 3 см. Сколько могло быть различных вариантов первоначального листа бумаги?
6. Петя разбил большой прямоугольник четырьмя отрезками, параллельными одной стороне, и четырьмя отрезками, параллельными другой стороне, на 25 маленьких прямоугольников. Вася задает вопросы Пете, и за один раз может узнать периметр любого из 25 маленьких прямоугольников. Вася хочет узнать сумму периметров всех 25 маленьких прямоугольников. За какое наименьшее количество вопросов он сможет это сделать?

**Матбой №3АВС**

1. *В каждой клетке таблицы 5 × 5 записано натуральное число. В любом куске таблицы размером 1 × 3 или 3 × 1 сумма чисел равна 8. Найдите наибольшую сумму всех чисел в таблице.*

**Ответ:** 70.

**Решение.** В клетке таблицы не может стоять число более 6, иначе в любой части 1 × 3 с этой клеткой сумма чисел будет более чем 6 + 1 + 1 = 8. Таблицу 5 × 5 можно разбить на 8 кусков 1 × 3 или 3 × 1 и одну клетку (разбиение на рисунке). Значит, сумма чисел в таблице не более 8 · 8 + 6 = 70. Пример на 70 на втором рисунке.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 1 | 6 |
| 6 | 1 | 1 | 6 | 1 |
| 1 | 1 | 6 | 1 | 1 |
| 1 | 6 | 1 | 1 | 6 |
| 6 | 1 | 1 | 6 | 1 |

Оценка (включая разбиение на триминошки и клетку) – *6 баллов*. Без разбиения (если не доказана возможность разрезать) – *4 балла*. Пример – *6 баллов*.

2. *В каждую клетку шахматной доски 8×8 записано натуральное число от 1 до 64, все числа различны. Шахматный король хочет пройти по нескольким клеткам доски (стартовую точку он выбирает сам) так, чтобы в каждой следующей клетке число было больше предыдущего. Какое наибольшее количество клеток он гарантированно может посетить (независимо от расстановки чисел)?*

**Ответ:** 4.

**Решение:** Заметим, что любой квадрат 2×2 шахматный король может обойти в любом порядке (т.к. любые две клетки в таком квадрате связаны ходом короля), в том числе и в порядке возрастания. Приведём пример, когда больше четырёх клеток король никак не сможет обойти. Разобьём доску на квадратики 2×2, после чего в левые верхние углы квадратиков (назовём их клетками типа 1) расставим числа от 1 до 16, в правые верхние (тип 2) – от 17 до 32, в левые нижние (тип 3) – от 33 до 48, а в правые нижние (тип 4) – от 49 до 64. Заметим, что король не может сделать ход из клетки в клетку того же типа, а значит, если он хочет, чтобы числа увеличивались, то должен перемещаться в клетку большего типа. Ясно, что это не может длиться дольше трёх ходов.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 2 | 18 | 3 | 19 | 4 | 20 |
| 33 | 49 | 34 | 50 | 35 | 51 | 36 | 52 |
| 5 | 21 | 6 | 22 | 7 | 23 | 8 | 24 |
| 37 | 53 | 38 | 54 | 39 | 55 | 40 | 56 |
| 9 | 25 | 10 | 26 | 11 | 27 | 12 | 28 |
| 41 | 57 | 42 | 58 | 43 | 59 | 44 | 60 |
| 13 | 29 | 14 | 30 | 15 | 31 | 16 | 32 |
| 45 | 61 | 46 | 62 | 47 | 63 | 48 | 64 |

3. *Назовем натуральное число красивым, если любое натуральное число от 1 до 8 включительно является делителем этого числа, либо числа, получающегося из первоначального перестановкой цифр. Найдите наименьшее красивое число.*

**Ответ:** 102.

**Решение.** Никакое двузначное число не подходит. Действительно, если в записи есть цифра 0, то число должно быть кратно НОК (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 8 · 3 · 5 · 7 = 840 > 100, что невозможно. Тогда для делимости на 2 и на 5 запись числа должна состоять из чётной цифры и цифры 5. Но числа 25, 45, 65, 85 не подходят: из 25, 65 и 85 не получишь кратное 3, из 45 не получишь кратное 7. Число 100 и 101 не подходят – из них не получишь числа, кратные 3. Число 102 подходит: 120 кратно 2, 3, 4, 5, 6, 8, число 210 кратно 7.

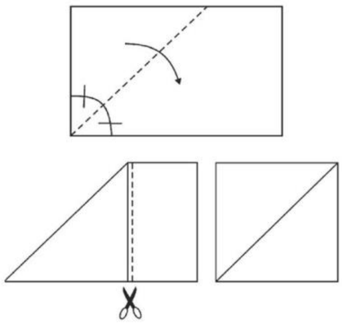
Указание по проверке. В решении должно быть объяснение минимальности для числа 102 и объяснение, почему число 102 подходит. Каждое оцениваем в *6 баллов*.

4. *На Острове Рыцарей и Лжецов мальчики всегда лгут, а девочки всегда говорят правду. На этом острове жила семья с тремя детьми. Однажды дети собрались вместе и по очереди сказали: «У меня два брата». «И у меня два брата». «А у меня две сестры». Сколько мальчиков и сколько девочек в этой семье?*

**Ответ:** 2 мальчика и 1 девочка.

**Решение.** Поскольку утверждения противоречивы, они не могут быть все истинными. Значит, есть хотя бы один мальчик. Если только 1 мальчик, то девочки должны сказать «У меня 1 брат» или «У меня 1 сестра». Этого не прозвучало. Но мальчиков не может быть и 3, так как тогда было бы верное утверждение «У меня два брата», по условию мальчик так сказать не может. Вариант два мальчика (например, 1 и 3) и девочка подходит.

5. *Оля занимается оригами и ей нужны квадратные листы бумаги. Она взяла прямоугольный лист и стала отрезать от него квадраты, как показано на рисунке. Квадрат она откладывала в стопку с готовыми деталями, а из прямоугольника снова вырезала квадрат по той же схеме. Оля проделала эту операцию 3 раза и получила 3 квадрата и прямоугольник размерами 2 × 3 см. Сколько могло быть различных вариантов первоначального листа бумаги?*



**Ответ:** 8.

**Решение.** Рассмотрим изменения в обратном порядке, начиная с прямоугольника 2×3.

<u>Способ 1.</u> Присоединить квадрат можно двумя способами – к маленькой стороне или к большой. Получаем прямоугольник 2×5 или 5×3. Добавляя следующий квадрат, получаем 2×7, 7×5, 5×8, 8×3. Добавляем ещё по квадрату и получаем 2×9, 9×7, 7×12, 12×5, 5×13, 13×8, 8×11, 11×3. Все прямоугольники различны. Их 8.

<u>Способ 2.</u> Вообще, так как есть две возможности присоединять квадрат на каждом этапе, в итоге получаем степень двойки. Надо только обосновать, что при разных путях не получится одинаковых прямоугольников. Это можно сделать, рассмотрев случай, когда прямоугольники впервые совпали. Тогда, вернувшись назад с помощью нашей процедуры, получим, что предыдущие прямоугольники тоже были одинаковыми. Значит, совпадений не будет. Поэтому их $2^3 = 8$.

6. *Петя разбил большой прямоугольник четырьмя отрезками, параллельными одной стороне, и четырьмя отрезками, параллельными другой стороне, на 25 маленьких прямоугольников. Вася задает вопросы Пете, и за один раз может узнать периметр любого из 25 маленьких прямоугольников. Вася хочет узнать сумму периметров всех 25 маленьких прямоугольников. За какое наименьшее количество вопросов он сможет это сделать?*

**Ответ:** за 5.

**Решение.** Заметим, что сумма периметров всех 25 прямоугольников – это умноженный на 5 периметр исходного прямоугольника. Значит, Васе нужно узнать периметр всего прямоугольника. Знания периметров пяти прямоугольников по диагонали дает искомое. Докажем, что знания периметров любых четырёх прямоугольников недостаточно. Действительно, если выбраны любые четыре, то какой-то из пяти горизонтальных отрезков не участвует в выборе. Но это означает, что, имея неизменными четыре выбранных прямоугольника и меняя пятый отрезок, получим разные периметры исходного.

Оценка – *6 баллов*, пример – *6 баллов*.

## Матбой №3D

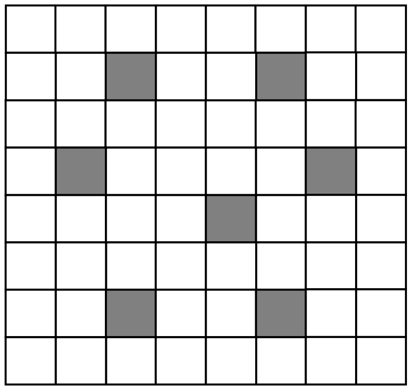
1. Вася перекрасил шахматную доску 8×8 так, что на ней 7 клеток покрашены в чёрный цвет, остальные покрашены в белый цвет. Найдите наибольшее натуральное число $k$ такое, что на доске гарантированно существует прямоугольник из белых клеток площади $k$ при любом расположении чёрных клеток.
2. В гандбольном турнире в один круг (каждая команда играет с каждой ровно 1 раз) приняли участие 16 команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Все команды набрали разное количество очков, при этом команда, занявшая 7 место, набрала 21 очко. Могла ли команда, занявшая первое место, сыграть ровно два раза вничью?
3. В треугольнике $ABC$ с углом $\angle ABC = 120°$ биссектрисы пересекаются в точке $I$. На продолжениях сторон $AB$ и $CB$ за точку $B$ отмечены, соответственно, точки $P$ и $Q$ таким образом, что $AP = CQ = AC$. Найдите величину $\angle PIQ$.
4. За круглым столом сидят 11 человек, у каждого из которых в правой руке стакан лимонада. В некоторые моменты времени люди чокаются, соблюдая следующие правила: а) человек не может одновременно чокаться с двумя другими, б) руки чокающихся не должны скрещиваться. После какого наименьшего количества чоканий может оказаться, что каждые два человека уже чокались друг с другом?
5. Найдите остаток от деления числа $n(n + 1)(n + 2)$ на число $n - 1$ при натуральном $n > 1$.
6. Натуральное число с чётным количеством цифр называется *корректным*, если, записывая его цифры одну за другой, мы получаем корректное описание самого числа, то есть каждая цифра на нечётном месте показывает, сколько раз в числе встречается цифра, записанная на следующем месте. Например, 1210 и 151031 – *корректные* числа, а число 1031 не является *корректным*. Докажите, что *корректных* чисел больше 2021.


## Матбой №3D

1. Вася перекрасил шахматную доску 8×8 так, что на ней 7 клеток покрашены в чёрный цвет, остальные покрашены в белый цвет. Найдите наибольшее натуральное число $k$ такое, что на доске гарантированно существует прямоугольник из белых клеток площади $k$ при любом расположении чёрных клеток.
2. В гандбольном турнире в один круг (каждая команда играет с каждой ровно 1 раз) приняли участие 16 команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Все команды набрали разное количество очков, при этом команда, занявшая 7 место, набрала 21 очко. Могла ли команда, занявшая первое место, сыграть ровно два раза вничью?
3. В треугольнике $ABC$ с углом $\angle ABC = 120°$ биссектрисы пересекаются в точке $I$. На продолжениях сторон $AB$ и $CB$ за точку $B$ отмечены, соответственно, точки $P$ и $Q$ таким образом, что $AP = CQ = AC$. Найдите величину $\angle PIQ$.
4. За круглым столом сидят 11 человек, у каждого из которых в правой руке стакан лимонада. В некоторые моменты времени люди чокаются, соблюдая следующие правила: а) человек не может одновременно чокаться с двумя другими, б) руки чокающихся не должны скрещиваться. После какого наименьшего количества чоканий может оказаться, что каждые два человека уже чокались друг с другом?
5. Найдите остаток от деления числа $n(n + 1)(n + 2)$ на число $n - 1$ при натуральном $n > 1$.
6. Натуральное число с чётным количеством цифр называется *корректным*, если, записывая его цифры одну за другой, мы получаем корректное описание самого числа, то есть каждая цифра на нечётном месте показывает, сколько раз в числе встречается цифра, записанная на следующем месте. Например, 1210 и 151031 – *корректные* числа, а число 1031 не является *корректным*. Докажите, что *корректных* чисел больше 2021.

## Матбой №3D

1. *Вася перекрасил шахматную доску 8×8 так, что на ней 7 клеток покрашены в чёрный цвет, остальные покрашены в белый цвет. Найдите наибольшее натуральное число k такое, что на доске гарантированно существует прямоугольник из белых клеток площади k при любом расположении чёрных клеток.*



**Ответ:** 8.

**Решение.** Покажем, что для $k = 8$ условие выполняется. Всегда существует горизонталь, свободная от чёрных клеток, которая и даёт нужный пример. На рисунке дан пример раскраски 7 клеток в чёрный цвет, при которой не существует белого прямоугольника площади больше 8.

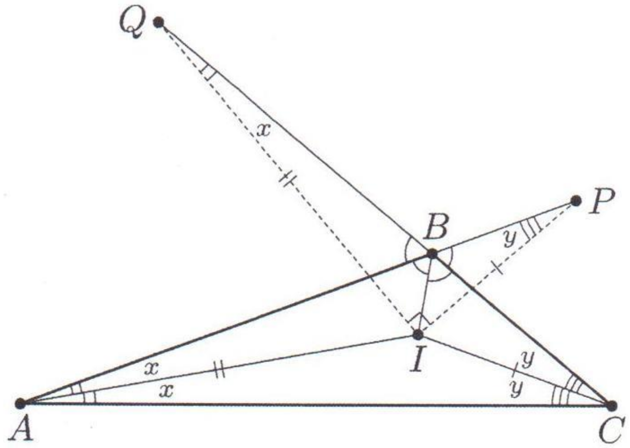
Только оценка — *6 баллов*, только пример — *6 баллов*.

2. *В гандбольном турнире в один круг (каждая команда играет с каждой ровно 1 раз) приняли участие 16 команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Все команды набрали разное количество очков, при этом команда, занявшая 7 место, набрала 21 очко. Могла ли команда, занявшая первое место, сыграть ровно два раза вничью?*

**Ответ:** нет.

**Решение.** Всего было сыграно 16 × 15/2 =120 матчей, то есть разыграно 240 очков. Команды, занявшие последние 9 мест (с 8 по 16) между собой разыграли $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2 = 72$ очка. Таким образом, первые 7 команд набрали не больше 240 – 72 = 168 очков. При этом по условию 7 команда набрала 21 очко, то есть, 7, 6, 5, …, 1 команда набрали вместе минимум 21 + 22 + 23 + … + 27 = 168 очков. Тогда каждая из 6 первых команд набрала ровно столько очков. Тогда у команды-победителя 27 очков, значит, она потеряла 3 очка, то есть 3 матча сыграла вничью или 1 проиграла и 1 сыграла вничью.

3. *В треугольнике ABC с углом ∠ABC = 120° биссектрисы пересекаются в точке I. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены, соответственно, точки P и Q таким образом, что AP = CQ = AC. Найдите величину ∠PIQ.*




**Ответ:** 90°.

**Решение.** Из свойства смежных углов получаем, что $\angle ABQ = \angle PBC = 60°$. Так как $BI$ – биссектриса, то $\angle ABI = \angle IBC = 60°$. Пусть $\angle CAB = 2x$, $\angle BCA = 2y$, тогда $2x + 2y + 120° = 180°$, или $x + y = 30°$. Так как по двум сторонам и углу между ними $\Delta ACI = \Delta QCI$, то $\angle CQI = x$. Тогда $\angle QIB = 180° – 120° – x = 60° – x$. Аналогично, $\angle PIB = 60° – y$.

Тогда $\angle PIQ = \angle PIB + \angle QIB = (60° – y) + (60° – x) = 120° – (x + y) = 90°$.

4. *За круглым столом сидят 11 человек, у каждого из которых в правой руке стакан лимонада. В некоторые моменты времени люди чокаются, соблюдая следующие правила: а) человек не может одновременно чокаться с двумя другими, б) руки чокающихся не должны скрещиваться. После какого наименьшего количества чоканий может оказаться, что каждые два человека уже чокались друг с другом?*

**Ответ:** 11.

**Решение.** В каждое из чоканий хотя бы один из присутствующих отдыхает. Кроме того, он должен чокнуться с 10 присутствующими, всего произойдёт 11 чоканий. Поэтому число чоканий не меньше 11. Вот как все пары могут чокнуться за 11 операций. Пусть каждый человек, когда до него дойдёт очередь, проведет от себя диаметр стола и произнесёт тост, а каждые две человека, сидящие симметрично относительно проведенного диаметра, чокнутся.

Только оценка — *6 баллов*, только пример — *6 баллов*.

5. *Найдите остаток от деления числа $n(n + 1)(n + 2)$ на число $n – 1$ при натуральном $n > 1$.*

**Ответ:** при $n = 2, 3, 4, 7$ остаток 0, при $n = 5$ остаток 2, при $n = 6$ остаток 1, при $n > 7$ остаток 6.

**Решение.** $n(n + 1)(n + 2) \equiv 1\times2\times3 \pmod{n – 1}$, то есть даёт остаток 6, если $n – 1 > 6$, то есть при $n > 7$.
Если $n = 6$, то $n(n + 1)(n + 2) \equiv 6 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$.
Если $n = 5$, то $n(n + 1)(n + 2) \equiv 6 \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$.
Если $n = 2, 3, 4, 7$, то $n(n + 1)(n + 2) \equiv 6 \pmod{n – 1} \equiv 0 \pmod{n – 1}$.

6. *Натуральное число с чётным количеством цифр называется корректным, если, записывая его цифры одну за другой, мы получаем корректное описание самого числа, то есть каждая цифра на нечётном месте показывает, сколько раз в числе встречается цифра, записанная на следующем месте. Например, 1210 и 151031 – корректные числа, а число 1031 не является корректным. Докажите, что корректных чисел больше 2021.*

**Решение.** Число 121314151617181910 – *корректное*. Если его цифры разбить на пары, то любая перестановка пар оставляет число *корректным*, поэтому корректных чисел не меньше 9! = 362880, что превосходит 2021.