БАЙКАЛЬСКИЙ ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ-2022
ЗАДАНИЯ:

Турнир математических боёв № 1 A

1. Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32. (Дырка не содержит граничных клеток!) Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать её по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1×1 – это тоже полоска!)
2. Если сложить пять дат, на которые приходится зимняя школа, т.е. 02.01.22, 03.01.22, 04.01.22, 05.01.22, 06.01.22, то получится 20.05.110. Если сложить другие пять последовательных дат, то получится 63.**.80. Какое двузначное число пропущено?
3. Можно ли разрезать квадрат 6×6 по границам клеток на 8 прямоугольников с попарно различными площадями?
4. На некоторые клетки шахматной доски 8×8 положили по яблоку (всего 20 яблок). Могло ли оказаться, что для каждой клетки доски по крайней мере на одной из соседних с ней по стороне клеток лежит яблоко?
5. Найдите пару последовательных трёхзначных чисел, произведение которых имеет наибольшее число различных простых делителей среди всех таких пар.
6. На столе лежат 40 красных, 40 синих и 40 белых шаров. Паша и Вова по очереди делают ходы, начинает Паша. За один ход можно взять любые два шарика, только если это не пара из синего и белого шара. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Турнир математических боёв № 1 B

1. В некоторые k клеток доски 8×8 расставлены различные числа таким образом, что для каждой клетки с числом a среди чисел в клетках, имеющих ровно одну общую точку с данной, не более одного числа, большего a. Найдите наибольшее возможное значение k.
2. Докажите, что уравнение $2021^m + 2021^n = k^2$ не имеет решений в натуральных числах.
3. Знайка должен выписать на доску 11 последовательных натуральных чисел. После этого ему разрешено превращать некоторые два числа на доске в их сумму или произведение. Сами слагаемые и сомножители при этом исчезают. Может ли он за 10 таких превращений получить на доске число 1000?
4. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольной таблице 10×20 так, чтобы в любом квадрате 3×3, содержащемся в этой таблице, были хотя бы две отмеченные клетки?
5. На рёбрах кубика произвольным образом написаны натуральные числа 1, 2, …, 12. Может ли оказаться, что ни на одной паре рёбер, имеющих общую вершину, нет соседних чисел (отличающихся на 1).
6. Сколькими способами на шахматной доске 8×8 можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы ни для каких двух из них одна из них не находилась одновременно правее и ниже другой?

Турнир математических боёв № 1 C

1. Внутри квадрата $ABCD$ со стороной 3 отмечены точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 1$. Всегда ли площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ меньше 5?
2. Есть 32 стакана с компотом. Повар умеет выравнивать количество компота в любых двух стаканах, переливая часть компота из одного стакана в другой. Может ли он сделать количество компота во всех стаканах одинаковым?
3. Заяц хочет выпилить из шахматной доски квадрат 2×2. Однако, Волк проведал о его планах и выпилил из этой доски 12 клеточек. Всегда ли Заяц после этого сможет справиться с поставленной задачей?
4. На доске написано несколько «+» и несколько «-». Разрешается два одинаковых знака заменять на «+», а два разных – на «-». Докажите, что оставшийся в конце знак не зависит от порядка операций.
5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., N. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их сумму или их произведение. Найдётся ли такое N, большее 2022, что за $N - 1$ операцию на доске можно получить число вида 100…0?
6. Пусть $a < b < c$ – длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, d – длина диагонали параллелепипеда, соединяющей две его противоположные вершины. Докажите, что $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 > 3a^2b^2c^2d^2$.

Турнир математических боёв № 2 A

1. В семье несколько дочерей и трое сыновей, причем все дочери старше всех сыновей. Все дети родились в один день, но все в разные годы. Когда родился старший сын, суммарный возраст всех детей в семье был равен 55 годам. Когда родился младший, суммарный возраст стал равен 155 годам. Сегодня, в очередной день рожденья, суммарный возраст составляет 166 лет. Сколько лет сегодня исполнилось среднему сыну?
2. Дан куб $10 \times 10 \times 10$. Можно ли закрасить несколько его граней так, чтобы после разрезания куба на 1000 единичных кубиков, количество кубиков, у которых хотя бы одна грань закрашена, было нечетным? (Грань можно закрашивать только целиком).

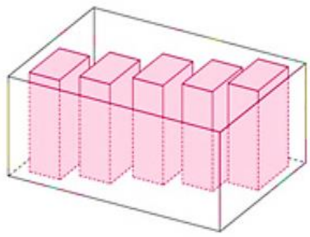
3. Есть три гири веса 3 килограмма и три гири веса 5 килограмм. На каждой из них наклейка, на которой указан вес этой гири. Эксперт знает, что наклейки правильные, но его шеф сомневается – он считает, что его сын мог ради шутки оторвать некоторые наклейки и переклеить их по-другому. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах эксперт может убедить шефа, что наклейки всё-таки правильные?
4. Известно, что A – натуральное число, а НОК(A, 120) < 500. Сколько разных значений может принимать A?
5. На десяти колпаках написано по одному числу, от 2 до 11 включительно. Трем мудрецам надели по колпаку, остальные спрятали. Каждый мудрец видит только два числа на колпаках других мудрецов. Им сообщили, что произведение чисел на надетых колпаках является квадратом натурального числа. Может ли кто-нибудь из мудрецов наверняка узнать число на своём колпаке?
6. У Алины есть неограниченный запас конфет трёх видов: карамель, трюфели и батончики. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции: 1. Съесть конфету одного вида, и на её место положить по конфете двух других видов из запаса в любом порядке. 2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида. Верно ли, что как бы Кирилл ни разложил изначально конфеты, Алина сможет действовать так, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

Турнир математических боёв № 2 B

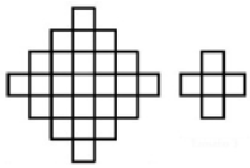
1. В квартире живут двуногие люди, четырехногие кошки, шестиногие тараканы и восьминогие пауки, причём все виды присутствуют. Пауков вдвое больше, чем людей. Известно, что среднее количество ног у всех существ является целым числом. Каких существ в квартире больше всего?
2. Действительные ненулевые числа a, b таковы, что $a - b = ab$. Чему может быть равно
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab?$$
3. На доске в ряд выписаны числа от 1 до 14 в некотором порядке. Дима записал в тетрадку сумму первых трех чисел, после этого сумму второго, третьего и четвертого чисел, затем сумму третьего, четвертого и пятого чисел и т.д. В итоге в тетрадке оказалась запись 17; 28; 23; 26; 20; 19; 21; 26; 28; 25; 27; 20. Чему может быть равна сумма второго и предпоследнего чисел на доске?
4. На доске написаны числа 1, 2, …, 50. Играют Аня и Боря, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать на доску их неотрицательную разность. Боря хочет, чтобы в какой-то момент больше половины всех чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?
5. На планете Шелезяка несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если чередовать красные и зеленые дороги, либо жёлтые и зелёные дороги, то также вернёшься ровно через 6 переездов. Может ли на планете быть ровно 12 городов?
6. Таблица состоит из n строчек и 100 столбцов. Каждая клетка окрашена в чёрный или белый цвет, причём в каждой строке поровну чёрных и белых клеток. При каких n может выполняться следующее свойство: если строка и столбец пересекаются по чёрной клетке, то в них поровну чёрных клеток, а если по белой, то поровну белых клеток?

Турнир математических боёв № 2 C

1. Андрей заменил буквы $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ на цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, использовав каждую по одному разу, так, чтобы выражение
$$\frac{2^a+2^b+2^c+2^d+2^e}{2^f+2^g+2^h+2^i+2^j}$$
принимало наиболее близкое к 1 значение. Найдите это значение.



2. Внутри прямоугольного аквариума зачем-то стоят 5 одинаковых кирпичей. Уровень воды в аквариуме равен 9 см. Когда два кирпича вынули, уровень воды оказался равен 7 см. Какой уровень воды будет, если достать все кирпичи? Высота аквариума и кирпичей больше 9 см.

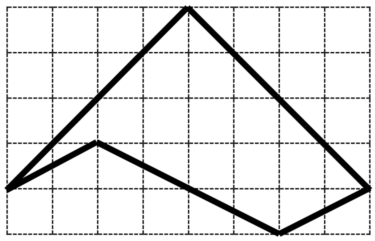


3. Дан крест размера 2021. В каждом квадратике записано число +1. За один ход можно выбрать несколько клеток, образующих крест размера 3 и умножить все числа в этом кресте на – 1. Можно ли за несколько ходов получить во всех клетках число – 1? (Крестом размера k называется фигура как на картинке, у которой в вертикали, соединяющей самую верхнюю клетку с самой нижней ровно k клеток. Например, на картинке изображены кресты размера 7 и 3).

4. Коля выписал на доску все натуральные делители числа $N > 1$ в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?
5. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их произведение, увеличенное на 1331. Может ли через 99 таких операций на доске оказаться число вида 100…0?
6. У Васи есть фишки трех цветов: красные (К), зеленые (З) и синие (С). Он поставил в ряд 9 фишек: КЗКЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зеленые, зеленые – на синие, синие – на красные. Может ли он за 7 ходов сделать все фишки синими?

Турнир математических боёв № 3 А

1. Вася перемножил все натуральные числа от 1011 до 2022 включительно и прибавил к этому произведению единицу. Докажите, что все простые делители полученного числа больше 2022.
2. Разрежьте фигуру на рисунке на две одинаковые части.



3. Можно ли расставить на шахматной доске 32 коня, чтобы каждый из них бил ровно двух коней?
4. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 5?
5. Сколько существует способов разрезать квадрат 10×10 по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.
6. У Пети есть флажки синего, белого и красного цвета, каждого цвета – ровно 10 флажков. В магазине могут обменять флажки тремя способами. За 4 белых можно получить 5 синих. За 2 красных и три синих можно получить 4 белых. Наконец, за 3 белых и 4 синих можно получить 7 красных. Сможет ли Петя в результате нескольких таких обменов сделать так, чтобы у него было как минимум 11 флажков каждого цвета?

Турнир математических боёв № 3 B

1. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.
2. В ряд выписано 21 различное натуральное число, ни одно из них не превышает N. В каждой паре соседних чисел одно делится на другое. При каком наименьшем N это может быть?
3. Какое наибольшее число кораблей 1×2 можно выставить на доску 8×8, не нарушая правил морского боя (корабли не должны соприкасаться даже углами)?
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны соответственно 15, 48 и 40. Найдите площадь треугольника ABC.
5. Петя выбрал из пятидесяти первых натуральных чисел ровно 26 штук. Оказалось, что среди них нет трёх чисел таких, что одно из них является суммой двух других. Докажите, что среди выбранных Петей чисел нет числа 2.
6. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, представимы в виде $2^a - 2^b$, где a и b – целые неотрицательные числа?

Турнир математических боёв № 3 C

1. Какое наименьшее количество шахматных коней нужно, чтобы побить все чёрные клетки шахматной доски 9×9, угловые клетки которой чёрные?
2. Клетки доски 11×11 покрашены в белый цвет. Можно выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенных по диагонали, перекрасить в черный цвет. Какое наибольшее число черных клеток удастся получить в результате таких операций?
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны соответственно 15, 48 и 40. Найдите площадь треугольника ABC.
4. На гранях куба записали натуральные числа. Затем в каждую вершину записали произведение чисел на трёх прилегающих к ней гранях. Сумма чисел в вершинах равна 1001. Чему равна сумма чисел на гранях?

5. Найдите остаток от деления числа $n(n + 1)(n + 2)$ на число $n - 1$ при натуральном $n > 1$.
6. Найдите численное значение выражения $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, если известно, что x не равен y и сумма первых двух слагаемых равна третьему.

РЕШЕНИЯ:

Турнир математических боёв № 1 А

1. Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32. (Дырка не содержит граничных клеток!) Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать её по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1 × 1 — это тоже полоска!)

Ответ: 21 полоска.

Решение. Раскрасим горизонтальные границы прямоугольника и дыры красным цветом, а вертикальные границы – синим. Поскольку у каждой из 20 горизонтальных полосок ровно 2 синие стороны длины 1, то суммарная длина синих линий равна 40. Тогда, поскольку сумма периметров прямоугольника и дыры равна 82, то суммарная длина красных линий равна 82 – 40 = 42. Теперь, поскольку у каждой вертикальной полосы ровно 2 красные стороны длины 1, то количество вертикальных полос при разрезании равно 21.

2. Если сложить пять дат, на которые приходится зимняя школа, т.е. 02.01.22, 03.01.22, 04.01.22, 05.01.22, 06.01.22, то получится 20.05.110. Если сложить другие пять последовательных дат, то получится 63.**.80. Какое двузначное число пропущено?

Ответ: 13.

Решение. 80/5 = 16, поэтому у пяти дат одинаковый, 16-й год. Если бы числа данных дат были пятью последовательными числами, то их сумма бы делилась на 5, т.к. $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 5x + 10 = 5(x + 2)$. Но 63 не делится на 5. Значит, данные даты затрагивают два соседних месяца. В конце месяца даты примерно равны 30, а сумма 63 примерно равна $2 \cdot 30$, т.е. в конце месяца две даты, и еще три в начале следующего месяца. Тогда числа в данных датах равны 01, 02, 03 и еще два числа с суммой 63 – 1 – 2 – 3 = 57, т.е. 28 и 29. 29 дней может быть только в феврале (16-й год – високосный). Значит, искомые даты – 28.02.16, 29.02.16, 01.03.16, 02.03.16, 03.03.16, а искомая сумма равна 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 13.

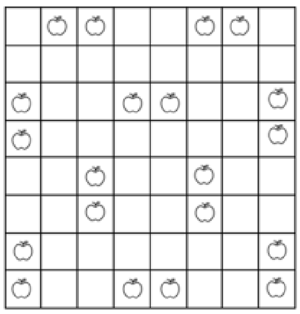
Доказано, что 63 получено не в одном месяце: *2 балла*.

3. Можно ли разрезать квадрат 6 × 6 по границам клеток на 8 прямоугольников с попарно различными площадями?

Ответ: Нельзя.

Решение. Сумма площадей прямоугольников не меньше 1 + 2 + ... + 8 = 36. Значит, любой способ разрезания должен содержать такие площади. Но с площадью 7 может быть только прямоугольник 1 × 7, который никак не помещается внутри 6 × 6.

4. На некоторые клетки шахматной доски 8 × 8 положили по яблоку (всего 20 яблок). Могло ли оказаться, что для каждой клетки доски по крайней мере на одной из соседних с ней по стороне клеток лежит яблоко?



Ответ: Могло.

Решение. См. рис.

5. Найдите пару последовательных трёхзначных чисел, произведение которых имеет наибольшее число различных простых делителей среди всех таких пар.

Ответ: 714 и 715.

Решение. $714 \cdot 715 = 510510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. Если простых делителей больше, то их произведение больше миллиона, и не может быть произведением трёхзначных чисел.

Если нет доказательства максимальности, то дыра в *4 балла*.

6. На столе лежат 40 красных, 40 синих и 40 белых шаров. Паша и Вова по очереди делают ходы, начинает Паша. За один ход можно взять любые два шарика, только если это не пара из синего и белого шара. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Вова.

Решение. Если игрокам удастся взять все шары, то последний ход сделает Вова. Тогда пусть Вова после каждого своего хода оставляет четное число красных, синих и белых шаров по отдельности. Он сможет это сделать. Действительно, если Паша взял два разноцветных шара, то их количество нечётно, а значит, можно взять такие же шары. Если же Паша взял два одноцветных, то можно взять два любых одноцветных, т.к. шары еще не кончились.

Турнир математических боёв № 1 В

1. В некоторые k клеток доски 8×8 расставлены различные числа таким образом, что для каждой клетки с числом a среди чисел в клетках, имеющих ровно одну общую точку с данной, не более одного числа, большего a. Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: 52.

Решение. Покрасим доску в шахматную раскраску. На левом рисунке посмотрим на четыре клетки, отмеченные цифрой 1. Если в каждой из них стоит число, то наименьшее из четырёх чисел в этих клетках имеет два больших соседа. Следовательно, хотя бы одна из этих четырёх клеток не отмечена. Аналогично, не отмечена хотя бы одна из клеток, помеченных 2, 3, ..., 6. То есть, хотя бы 6 черных клеток не отмечено.

	1				2		
1		1		2		2	
	1		6		2		
		6		6		3	
	5		6		3		3
5		5		4		3	
	5		4		4		
				4			

	1		-2		15		-3
2		X		14		16	
	3		13		X		17
4		X		12		18	
	5		11		X		19
6		X		10		20	
	7		9		X		21
0		8		-1		22	

Пример для 6 неотмеченных черных клеток изображен на правом рисунке. Оценка и пример для белых клеток строятся аналогично. Черная и белая клетки не могут иметь ровно одну общую вершину, поэтому можно объединить два примера на одной доске.
Только оценка – *4 балла*. Только пример – *4 балла*.

2. Докажите, что уравнение $2021^m + 2021^n = k^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение. При делении на 4 левая часть даёт остаток 1 + 1 = 2, а правая часть даёт остаток 0 или 1.

---

3. Знайка должен выписать на доску 11 последовательных натуральных чисел. После этого ему разрешено превращать некоторые два числа на доске в их сумму или произведение. Сами слагаемые и сомножители при этом исчезают. Может ли он за 10 таких превращений получить на доске число 1000?

Ответ: может.

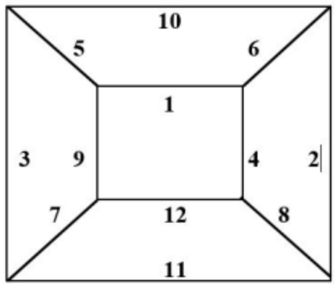
Решение. Например, выписать числа от 5 до 15. Все кроме центрального числа 10 разбить на пары с суммой 20. Таких пар 5. Сложить все пары. Останутся числа 10 и 100. Их перемножить.

4. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольной таблице 10×20 так, чтобы в любом квадрате 3×3, содержащемся в этой таблице, были хотя бы две отмеченные клетки?

Ответ. 36.

Решение. *Пример:* В столбцах с номерами, кратными 3, отметим клетки с номерами вида $3k + 2$ и $3k$. Любой квадрат 3×3 пересекает столбец с номером, кратным трем, а тогда в него попадают какие-то две отмеченные клетки. *Оценка.* Выделим 3×6 непересекающихся квадратов 3×3, в каждом из них должно быть отмечено хотя бы две клетки.
Пример – *4 балла*, оценка – *4 балла*.

5. На рёбрах кубика произвольным образом написаны натуральные числа 1, 2, …, 12. Может ли оказаться, что ни на одной паре рёбер, имеющих общую вершину, нет соседних чисел (отличающихся на 1).



Ответ: да.

Решение. См. рис.

6. Сколькими способами на шахматной доске 8×8 можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы ни для каких двух из них одна из них не находилась одновременно правее и ниже другой?

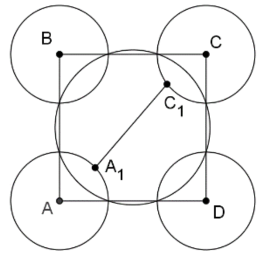
Ответ: 1 способ.

Решение. Сначала отметим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали стоит ровно одна ладья. Рассмотрим самую верхнюю ладью. Если она стоит не в верхнем правом углу, то правее неё есть ладья, которая и правее и ниже. Противоречие. Итак, самая верхняя ладья стоит в правом верхнем углу. Аналогичные рассуждения для доски без верхней горизонтали и правой вертикали приводят к тому, что вторая верхняя ладья стоит левее и ниже первой на одну клетку, и т.д. Только ответ с примером – *2 балла*.

Турнир математических боёв № 1 С

1. Внутри квадрата $ABCD$ со стороной 3 отмечены точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 1$. Всегда ли площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ меньше 5?

Ответ: всегда.



Решение. Площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ не больше половины произведения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1, а квадрат каждой из этих диагоналей меньше $1^2 + 3^2 = 10$ (это можно доказать, проведя окружность через точки пересечения квадрата и угловых окружностей. Эти отрезки не больше диаметра). Поэтому площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ меньше 5.
Если утверждение «квадрат каждой из этих диагоналей меньше $1^2 + 3^2 = 10$» не доказано – не более *6 баллов*.

2. Есть 32 стакана с компотом. Повар умеет выравнивать количество компота в любых двух стаканах, переливая часть компота из одного стакана в другой. Может ли он сделать количество компота во всех стаканах одинаковым?

Ответ: может.

Решение. Повар разбивает стаканы по парам и выравнивает уровень в парах. Затем разбивает пары по четвёркам и выравнивает уровень в них. Затем разбивает четвёрки по восьмёркам и выравнивает уровень в них, и т.д.

3. Заяц хочет выпилить из шахматной доски квадрат 2×2. Однако, Волк проведал о его планах и выпилил из этой доски 12 клеточек. Всегда ли Заяц после этого сможет справиться с поставленной задачей?

Ответ: всегда.

Решение. Рассмотрим **узлы сетки** на доске. Исходно на доске было 49 внутренних узлов сетки. Вырезанные Волком клетки затрагивают не более 48 узлов сетки. Тогда один из узлов сетки в любом случае остаётся незатронутым, т.е. 4 прилегающие к нему клетки Волк испортить не смог. Тогда они образуют квадрат 2×2, который и вырежет Заяц.

4. На доске написано несколько «+» и несколько «-». Разрешается два одинаковых знака заменять на «+», а два разных – на «-». Докажите, что оставшийся в конце знак не зависит от порядка операций.

Решение. При смене двух плюсов на плюс количество минусов не меняется. При смене двух минусов на плюс количество минусов уменьшается на два. При смене плюса и минуса на минус количество минусов сохраняется. Таким образом, чётность количества минусов сохраняется. Поэтому если минусов было нечётное количество, то независимо от порядка операций в конце останется минус. Если же количество минусов будет чётным, то независимо от порядка операций в конце останется плюс.

5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., N. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их сумму или их произведение. Найдётся ли такое N, большее 2022, что за $N - 1$ операцию на доске можно получить число вида 100…0?

Ответ: найдётся.

Решение. Например, можно взять $N = 10^k - 1$. Все числа кроме центрального $10^k/2$ разобьем на пары с суммой 10^k и сложим числа в парах. Два из полученных результатов 10^k сложим и перемножим результат с центральным $10^k/2$, получив $2 \cdot 10^k \cdot 10^k/2 = 10^{2k}$. Теперь все числа на доске – это степени десятки, и осталось их все перемножить.

6. Пусть $a < b < c$ – длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, d – длина диагонали параллелепипеда, соединяющей две его противоположные вершины. Докажите, что $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 > 3a^2b^2c^2d^2$.

Решение. Так как $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, то исходное неравенство перепишется в виде $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 > 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$,
$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 + 2(a^4b^2c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4) > 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$,
$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 - a^4b^2c^2 - a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4 > 0$. Умножив на 2 и сгруппировав, получаем $(a^2b^2 - b^2c^2)^2 + (a^2b^2 - c^2a^2)^2 + (b^2c^2 - c^2a^2)^2 > 0$, что, очевидно, верно, так как длины рёбер неравны по условию. Так как нужное неравенство эквивалентно верному неравенству, то оно также верно.

Турнир математических боёв № 2 А

1. В семье несколько дочерей и трое сыновей, причем все дочери старше всех сыновей. Все дети родились в один день, но все в разные годы. Когда родился старший сын, суммарный возраст всех детей в семье был равен 55 годам. Когда родился младший, суммарный возраст стал равен 155 годам. Сегодня, в очередной день рожденья, суммарный возраст составляет 166 лет. Сколько лет сегодня исполнилось среднему сыну?

Ответ: 2 года.
Решение. С момента рождения младшего до сегодняшнего дня возраст детей, которых больше 3, увеличился на $166 - 155 = 11$. Тогда детей 11 и прошёл 1 год. Тогда дочерей $11 - 3 = 8$. Пусть средний старше младшего на x лет, старший старше среднего на y лет. Тогда суммарный возраст с момента рождения старшего до момента рождения младшего с одной стороны увеличился на $155 - 55 = 100$, а с другой на $9y + 10x$. Получаем, что $9y + 10x = 100$, что имеет единственное решение в натуральных числах $x = 1; y = 10$. Итак, среднему сейчас $x + 1 = 1 + 1 = 2$ года.
Ответ с примером – *0 баллов*.
Найдено количество детей (или количество девочек) – *4 балла*.

2. Дан куб $10 \times 10 \times 10$. Можно ли закрасить несколько его граней так, чтобы после разрезания куба на 1000 единичных кубиков, количество кубиков, у которых хотя бы одна грань закрашена, было нечетным? (Грань можно закрашивать только целиком.)

Ответ: Да, можно закрасить три грани, имеющие одну общую вершину.
Решение. Кубики, не имеющие закрашенной грани – в точности те, которые принадлежат кубу $9 \times 9 \times 9$, примыкающему к противоположной вершине. Их нечетное число, а всего единичных кубиков четно. Поэтому и кубиков с окрашенной гранью четно.

3. Есть три гири веса 3 килограмма и три гири веса 5 килограмм. На каждой из них наклейка, на которой указан вес этой гири. Эксперт знает, что наклейки правильные, но его шеф сомневается – он считает, что его сын мог ради шутки оторвать некоторые наклейки и переклеить их по-другому. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах эксперт может убедить шефа, что наклейки всё-таки правильные?

Ответ: за одно.
Решение. Надо сравнить вес трёх гирь, на которых написано, что они по 3 кг с весом двух, на которых написано, что они 5-килограммовые. Только при правильных наклейках две гири перевесят. На оставшейся 5-кг гире наклеена оставшаяся наклейка 5 кг.
Более 1 взвешивания – *0 баллов*.

4. Известно, что A – натуральное число, а НОК$(A, 120) < 500$. Сколько разных значений может принимать A?

Ответ: 32 значения.
Решение. НОК должен делиться на 120, поэтому равен 120, 240, 360 или 480. В первом случае в качестве A можно взять любой делитель числа $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ – всего 16 делителей. Во втором случае добавятся только делители 240, кратные 16 – их 4. В третьем случае добавятся только делители 360, кратные 9 – их 8. В четвертом случае добавятся только делители 480, кратные 32 – их 4. Всего $16 + 4 + 8 + 4 = 32$ значения.
Ошибки с подсчётами в одном из случаев: дыра *не более 4 баллов*.

5. На десяти колпаках написано по одному числу, от 2 до 11 включительно. Трем мудрецам надели по колпаку, остальные спрятали. Каждый мудрец видит только два числа на колпаках других мудрецов. Им сообщили, что произведение чисел на надетых колпаках является квадратом натурального числа. Может ли кто-нибудь из мудрецов наверняка узнать число на своём колпаке?

Ответ: может.
Решение. Простые числа 7 и 11 встречаются только 1 раз, поэтому не могут быть на колпаках. Если 5 участвует среди чисел на колпаках, то участвует и 10 (и наоборот), поэтому мудрец, который видит ровно одно из этих двух чисел, может узнать своё (тот, кто видит оба – не может). Если никто не видит 5 или 10, то их и нет, а числа на колпаках выбираются из набора 2, 3, 4, 6, 8, 9. Аналогично, 3 не может быть без 6 и наоборот, поэтому тот, кто видит ровно одно из них, тоже может узнать своё. Если 3 и 6 тоже отсутствуют, то есть 2 или 8. Они тоже в паре, и есть мудрец, определяющий своё число.

6. У Алины есть неограниченный запас конфет трёх видов: карамель, трюфели и батончики. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции: 1. Съесть конфету одного вида, и на её место положить по конфете двух других видов из запаса в любом порядке. 2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида. Верно ли, что как бы Кирилл ни разложил изначально конфеты, Алина сможет действовать так, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

Ответ: Неверно.
Решение. Заметим, что четность суммарного количества конфет первого и второго типа сохраняется. Поэтому если в начале положить только одну конфету первого типа, то на столе всегда будет оставаться хотя бы одна конфета.

Турнир математических боёв № 2 В

1. В квартире живут двуногие люди, четырехногие кошки, шестиногие тараканы и восьминогие пауки, причём все виды присутствуют. Пауков вдвое больше, чем людей. Известно, что среднее количество ног у всех существ является целым числом. Каких существ в квартире больше всего?

Ответ. Кошек.
Решение. На одного человека приходится 2 паука, в каждой такой тройке 18 ног. Заберем у пауков по 2 ноги и подарим их людям. Тогда все, кроме кошек, станут шестиногими. Следовательно, среднее значение больше 4, но меньше 6, т.е. ровно 5. Это означает, что должно быть поровну четырехногих и шестиногих существ. Тогда кошек столько же, сколько остальных вместе взятых, т.е. больше всех.

2. Действительные ненулевые числа a, b таковы, что $a - b = ab$. Чему может быть равно

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab?$$

Ответ. 2.

Решение. Из условия $a - b = ab$ получаем $b = a/(a+1)$, откуда при подстановке в выражение получаем $a + 1 + 1/(a + 1) - a^2/(a + 1) = (a^2 + 2a + 1 + 1 - a^2)/(a + 1) = 2$.

3. На доске в ряд выписаны числа от 1 до 14 в некотором порядке. Дима записал в тетрадку сумму первых трех чисел, после этого сумму второго, третьего и четвертого чисел, затем сумму третьего, четвертого и пятого чисел и т.д. В итоге в тетрадке оказалась запись 17; 28; 23; 26; 20; 19; 21; 26; 28; 25; 27; 20. Чему может быть равна сумма второго и предпоследнего чисел на доске?

Ответ: 27.

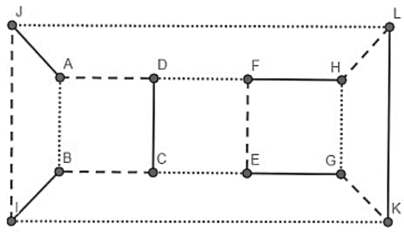
Решение. Сумма всех чисел известна. Мы можем найти сумму первого и последнего, так как все, кроме них разбивается на тройки. Можем аналогично найти сумму первых двух и сумму последних двух. Из этих трех сумм найдем требуемую. Замечание. Указанные суммы получаются для ряда 1, 14, 2, 12, 9, 5, 6, 8, 7, 11, 10, 4, 13, 3. Возможно, есть и другие ряды с такими суммами. Только ответ с примером – *2 балла*. Найдена сумма первого и последнего – *4 балла*. Неполный перебор не оценивается.

4. На доске написаны числа 1, 2, …, 50. Играют Аня и Боря, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать на доску их неотрицательную разность. Боря хочет, чтобы в какой-то момент больше половины всех чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

Ответ: нет.

Решение. Заметим, что сначала на доске 7 чисел, делящихся на 7, и 43 не делящихся. Аня своим ходом может уменьшить количество делящихся не более чем на 1. Если на доске осталось 7 или больше чисел, не делящихся на 7, то по принципу Дирихле найдутся два с одинаковыми остатками при делении на 7. Их Боря будет вычитать одно из другого, и таким образом каждые два хода количество не делящихся на 7 чисел будет уменьшаться на 2, а делящихся будет оставаться не менее 6 после хода Ани и не менее 7 после хода Бори. Через 38 ходов делящихся на 7 чисел будет не менее 7, а всего чисел останется 12. Если не делящихся на 7 чисел окажется меньше 7 раньше, то и конец игры наступит раньше, т.к. остальных будет больше. Отмечено, что пока неделящихся на 7 чисел больше 6, то их количество можно уменьшить – *4 балла*.

5. На планете Шелезяка несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если чередовать красные и зеленые дороги, либо жёлтые и зелёные дороги, то также вернёшься ровно через 6 переездов. Может ли на планете быть ровно 12 городов?



Ответ: Может.

Решение. Пример на картинке.

6. Таблица состоит из n строчек и 100 столбцов. Каждая клетка окрашена в чёрный или белый цвет, причём в каждой строке поровну чёрных и белых клеток. При каких n может выполняться следующее свойство: если строка и столбец пересекаются по чёрной клетке, то в них поровну чёрных клеток, а если по белой, то поровну белых клеток?

Ответ: 100 или 50.

Решение. При шахматной раскраске может быть 100. 50 может быть для таблицы, в которой 50 полностью черных столбцов и 50 белых. Докажем, что других ответов быть не может. Если есть столбец, в котором есть и черная, и белая клетка, то посмотрев на пересечение со строками в этих двух клетках, мы поймем, что в нем ровно 50 черных и ровно 50 белых, то есть количество строк равно 100. Если же в каком-то столбце все клетки одного цвета, то клеток в нем должно быть 50, чтобы выполнялось условие про пересечение со строками.

Турнир математических боёв № 2 С

1. Андрей заменил буквы $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ на цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, использовав каждую по одному разу, так, чтобы выражение

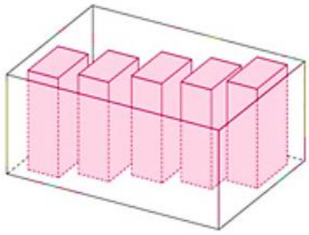
$$\frac{2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e}{2^f + 2^g + 2^h + 2^i + 2^j}$$

принимало наиболее близкое к 1 значение. Найдите это значение.

Ответ: 16/17.

Решение. Пусть данная дробь имеет вид A/B. Одно из чисел A, B, которое содержит 2^9, будет больше другого, т. к. $2^9 > 2^8 + 2^7 + 2^0$. Чтобы отношение было максимально близко к единице, с 2^9 нужно взять наименьшие слагаемые. Получается, что отношение A/B должно быть равно $\frac{512+1+2+4+8}{16+32+64+128+256} = \frac{527}{496} = \frac{17}{16}$ или $\frac{16}{17}$, если 2^9 в знаменателе. Второе отношение ближе к 1.

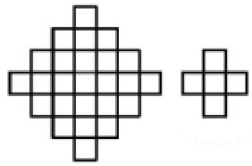
Арифметические ошибки – дыра не более *4 баллов*.



2. Внутри прямоугольного аквариума зачем-то стоят 5 одинаковых кирпичей. Уровень воды в аквариуме равен 9 см. Когда два кирпича вынули, уровень воды оказался равен 7 см. Какой уровень воды будет, если достать все кирпичи? Высота аквариума и кирпичей больше 9 см.

Ответ: 5,25 см.

Решение. Пусть площадь основания аквариума – S, площадь основания кирпича – s. Тогда объем воды $9(S - 5s) = 7(S - 3s)$, откуда $S = 12s$. Объем воды равен $63s$. Если достать все кирпичи, то уровень воды будет равен $63s/12s = 5{,}25$ см.



3. Дан крест размера 2021. В каждом квадратике записано число +1. За один ход можно выбрать несколько клеток, образующих крест размера 3 и умножить все числа в этом кресте на – 1. Можно ли за несколько ходов получить во всех клетках число – 1? (Крестом размера k называется фигура как на картинке, у которой в вертикали, соединяющей самую верхнюю клетку с самой нижней ровно k клеток. Например, на картинке изображены кресты размера 7 и 3).

Ответ: нельзя.

Решение. Так как нам важна только четность числа изменений каждой клетки, будем считать, что каждый крест размера 3 мы меняли не более одного раза. Рассмотрим левую верхнюю сторону креста. Самая верхняя клетка в ней принадлежит единственному кресту, поэтому этот крест мы должны поменять. Все следующие клетки на этой стороне, кроме самой нижней, принадлежат двум крестам, поэтому, идя сверху вниз, мы сможем однозначно определить, какие из крестов, примыкающих к стороне, мы меняли. А именно, окажется, что клетки на этой стороне должны разбиться на пары, где клетки одной пары принадлежат одному кресту, в котором меняли знак. Но на этой стороне (2021 + 1) : 2 = 1011 – нечетное число клеток. Значит, их нельзя разбить на пары. Противоречие.

4. Коля выписал на доску все натуральные делители числа $N > 1$ в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?

Ответ: не может.

Решение 1. Число N содержит хотя бы 2 делителя, значит среди них есть четные делители, следовательно, N делится на 2. Если бы оно было квадратом, то делилось бы и на 4. Но тогда два наибольших делителя N и $N/2$ будут чётными, т.е. чередование нарушится.

Решение 2. Если N является квадратом, то у него нечетное число натуральных делителей. Значит наибольший делитель N должен быть нечетным. Но у N должны быть четные делители – противоречие.

5. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их произведение, увеличенное на 1331. Может ли через 99 таких операций на доске оказаться число вида 100…0?

Ответ: нет.

Решение. От противного, пусть может. Вначале на доске есть число, кратное 11. При применении к нему операции вновь получается число, кратное 11. Поэтому среди чисел на доске в любой момент есть кратное 11. А в конце его нет – противоречие.

6. У Васи есть фишки трех цветов: красные (К), зеленые (З) и синие (С). Он поставил в ряд 9 фишек: КЗКЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зеленые, зеленые – на синие, синие – на красные. Может ли он за 7 ходов сделать все фишки синими?

	К	З	К	З	К	З	К	З	К
1 ход	З	С	З	З	К	З	К	З	К
2 ход	С	К	С	С	З	З	К	З	К
3 ход	С	З	К	К	С	С	З	З	К
4 ход	С	С	З	З	К	К	С	С	К
5 ход	С	С	С	С	З	З	К	К	К
6 ход	С	С	С	С	С	С	З	З	З
7 ход	С	С	С	С	С	С	С	С	С

Ответ: Может.

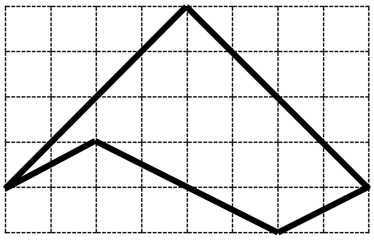
Решение. Пример приведён на картинке.

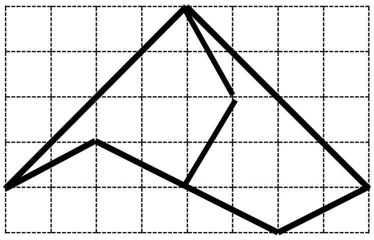
Турнир математических боёв № 3 А

1. Вася перемножил все натуральные числа от 1011 до 2022 включительно и прибавил к этому произведению единицу. Докажите, что все простые делители полученного числа больше 2022.

Решение. Полученное число не имеет простых делителей от 1011 до 2022, так как дает остаток 1. Все простые числа меньше 1011 имеют кратные между 1011 и 2022, на которые полученное число не делится. Следовательно, все простые делители полученного числа больше 2022.

2. Разрежьте фигуру на рисунке на две одинаковые части.





Решение. Ответ на рисунке.

3. Можно ли расставить на шахматной доске 32 коня, чтобы каждый из них бил ровно двух коней?

Ответ: можно.

Решение. Ответ на рисунке.

к	к	к			к	к	к
к		к			к		к
к	к	к			к	к	к
к	к	к			к	к	к
к		к			к		к
к	к	к			к	к	к

4. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 5?

Ответ: 37512 чисел.

Решение. Всего пятизначных чисел 9×10×10×10×10 = 90000. Из них не содержат пятерку 8×9×9×9×9 = 52488. Остальные содержат хотя бы одну пятерку. Их 37512.

5. Сколько существует способов разрезать квадрат 10 × 10 по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.

Ответ: 180 способов

Решение. Если разрезать квадрат на квадратики размером 1×1, то сумма периметров будет 400. Значит, в разрезе есть одна доминошка. Поэтому количество способов разрезания равно количеству способов разместить доминошку. В каждой строке 9 способов размещения горизонтальной доминошки, всего 90. То же самое по вертикали. Всего 180 способов.

6. У Пети есть флажки синего, белого и красного цвета, каждого цвета – ровно 10 флажков. В магазине могут обменять флажки тремя способами. За 4 белых можно получить 5 синих. За 2 красных и три синих можно получить 4 белых. Наконец, за 3 белых и 4 синих можно получить 7 красных. Сможет ли Петя в результате нескольких таких обменов сделать так, чтобы у него было как минимум 11 флажков каждого цвета?

Ответ: нет.

Решение. Заметим, что количество флажков увеличивается только при операции первого вида, но при этом количество белых флажков уменьшается на 4. Количество белых флажков увеличивается только при операции второго вида, причем ровно на 4, но при этом уменьшается общее количество флажков. Если количество флажков увеличилось, то операций первого вида было больше, чем операций второго. Но тогда уменьшилось общее количество белых флажков.

Турнир математических боёв № 3 В

1. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.

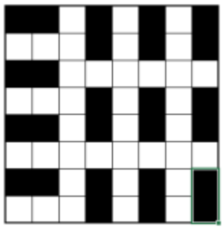
Решение: Предположим, что всегда остается поровну. Пусть в классе a мальчиков и $19 - a$ девочек. После ухода должно остаться 4 мальчика и 4 девочки. Тогда каждый мальчик дружит с $a - 5$ мальчиками и $10 - (a - 5) = 15 - a$ девочками, а каждая девочка – с $14 - a$ девочками и $10 - (14 - a) = a - 4$ мальчиками. Тогда $a(15 - a) = (19 - a)(a - 4)$, откуда $a = 9{,}5$ – нецелое число. Противоречие.

2. В ряд выписано 21 различное натуральное число, ни одно из них не превышает N. В каждой паре соседних чисел одно делится на другое. При каком наименьшем N это может быть?

Ответ: при $N = 24$.

Решение. Пример: 13, 1, 11, 22, 2, 14, 7, 21, 3, 15, 5, 10, 20, 4, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 9. ***Оценка.*** Пусть $N < 24$. Из чисел 13, 17, 19, 23 в ряду может оказаться не более одного. (Если их было хотя бы два, то около каждого из них, т.е. между ними должна стоять единица, и в ряду окажется только 3 числа.) Значит, в ряду останется не более 20 чисел. Оценка – *4 балла*, пример – *6 баллов*.

3. Какое наибольшее число кораблей 1 × 2 можно выставить на доску 8 × 8, не нарушая правил морского боя (корабли не должны соприкасаться даже углами)?



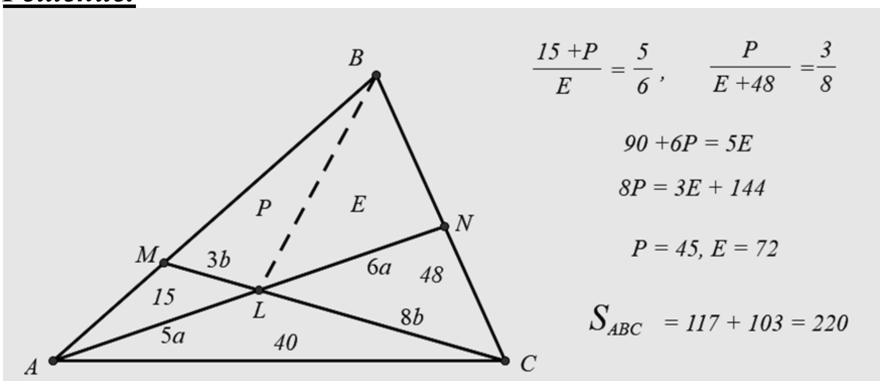
<u>Ответ:</u> 13.

<u>Решение.</u> ***Оценка.*** Всего на доске 8 × 8 есть 81 узел сетки (считая граничные). Каждый корабль 1 × 2 затрагивает ровно 6 узлов сетки, причём по правилам морского боя ни один узел сетки не может относиться сразу к двум кораблям. Тогда кораблей не более 13. ***Пример:***

4. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* взяты точки *M* и *N* соответственно. Отрезки *AN* и *CM* пересекаются в точке *L*. Площади треугольников *AML*, *CNL* и *ALC* равны соответственно 15, 48 и 40. Найдите площадь треугольника *ABC*.

<u>Ответ:</u> 220.

<u>Решение.</u>



5. Петя выбрал из пятидесяти первых натуральных чисел ровно 26 штук. Оказалось, что среди них нет трёх чисел таких, что одно из них является суммой двух других. Докажите, что среди выбранных Петей чисел нет числа 2.

<u>Решение.</u> Предположим, что Петя выбрал число 2. Тогда среди выбранных чисел не должно быть соседних четных чисел и соседних нечётных чисел. Это означает, что из 25 нечётных чисел взято не более 13, а из 24 чётных чисел от 4 до 50 – не больше 12. Но всего чисел 26, поэтому должно быть ровно 13 и 12 соответственно. Тогда выбранные нечётные – 1, 5, 9, …, 49. Следовательно, чётные числа 1 + 5 = 6, 1 + 9 = 10, 1 + 13 = 14, …, 1 + 49 = 50 – не выбраны, а числа 4, 8, 12, …, 48 – выбраны. Но 4 + 8 = 12. Противоречие. Доказано, что нечётных чисел 13, а чётных 12 – *2 балла*.

6. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, представимы в виде $2^a - 2^b$, где a и b – целые неотрицательные числа?

<u>Ответ:</u> 50 чисел.

<u>Решение.</u> Если в выражении $2^a - 2^b$ число $a > 11$, то разность либо неположительна, либо не меньше $2^{10} = 1024$. Таким образом, подойдут все пары (a, b), в которых $0 \le b < a < 10$, и пары (10, 5), …, (10, 9). Первого вида 9 + 8 + … + 1 = 45 пар, второго вида – 5 пар. При этом разные пары соответствуют разным числам. Если $2^a - 2^b = 2^c - 2^d$, то после деления на $2^{min(b,\,d)}$ либо части равенства будут разной четности, либо $b = d$ (но тогда и $a = c$).

Арифметические ошибки из-за эффекта ±1: *дыра в 4 балла*.

Турнир математических боёв № 3 С

1. Какое наименьшее количество шахматных коней нужно, чтобы побить все чёрные клетки шахматной доски 9 × 9, угловые клетки которой чёрные?

1		1						3
	1	*					3	
1		1	*				*	
				*		*		
		*				*		
						2		2
	4	*		*		*	2	
4						2		2

<u>Ответ:</u> 10.

<u>Решение.</u> Заметим, что 5 клеток, помеченных 1, можно побить не менее, чем 3 конями. Аналогично, для клеток с 2. Для клеток с 3, и 4 надо еще не меньше 2 коней. Всего не меньше 10 коней. Пример на рисунке.

2. Клетки доски 11 × 11 покрашены в белый цвет. Можно выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенных по диагонали, перекрасить в черный цвет. Какое наибольшее число черных клеток удастся получить в результате таких операций?

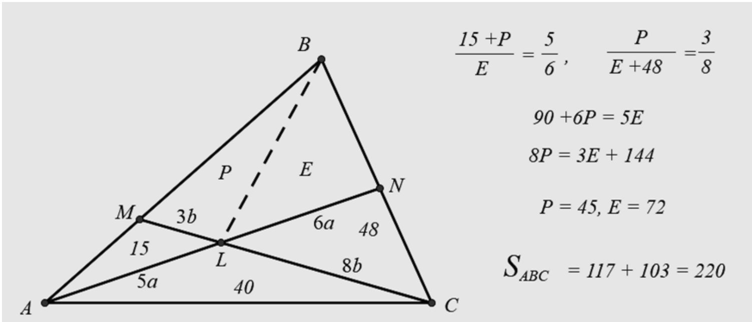
<u>Ответ:</u> 110 клеток.

<u>Решение.</u> Заметим, что в каждой строке останется по крайней мере одна белая клетка, так как в любом выделяемом квадрате две клетки лежат на одной строке, а закрасить можно только одну из них. Это значит, что больше 110 клеток перекрасить нельзя. Покажем, что 110 клеток можно покрасить в черный цвет. Отметим четыре угловые клетки и перекрасим левую нижнюю и правую верхнюю угловые клетки. Теперь отметим четыре угловые клетки квадрата 10 × 10 (без крайнего правого столбца и самой нижней строки) и вновь перекрасим левую нижнюю и правую верхнюю угловые клетки. Повторяя указанную процедуру, перекрасим 10 клеток крайнего левого столбца и крайней верхней строки (белой останется только верхняя левая угловая клетка. После этого все операции повторим для квадрата 10 × 10 без перекрашенных строки и столбца. Перекрасятся клетки второй строки сверху и второго левого столбца, кроме угловой верхней левой клетки. Последовательно повторяя все операции для меньших квадратов, перекрасим все клетки, кроме 11 клеток главной диагонали.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны соответственно 15, 48 и 40. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 220.

Решение.



4. На гранях куба записали натуральные числа. Затем в каждую вершину записали произведение чисел на трёх прилегающих к ней гранях. Сумма чисел в вершинах равна 1001. Чему равна сумма чисел на гранях?

Ответ: 31.

Решение. Запишем сумму произведений в вершинах и разложим на множители: $(a + c)(b + d)(e + f)$ = =1001 = 7×11×13. Тогда a + b + c + d + e + f) = 7 + 11 + 13 = 31.

5. Найдите остаток от деления числа $n(n + 1)(n + 2)$ на число $n - 1$ при натуральном $n > 1$.

Ответ: при n равном 2, 3, 4, 7 остаток 0, при $n = 5$ остаток 2, при $n = 6$ остаток 1, при $n > 7$ остаток 6.

Решение. Делим $n^3 + 3n^2 + 2n$ на $n - 1$, получаем остаток 6. Дальше перебор.

6. Найдите численное значение выражения $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, если известно, что x не равен y и сумма первых двух слагаемых равна третьему.

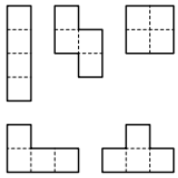
Ответ: 2.

Решение. Из условия задачи можно записать уравнение $\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}=\frac{1}{xy+1}-\frac{1}{y^2+1}$, преобразуя которое получим $\frac{x}{x^2+1}=\frac{y}{y^2+1}$. Решая это уравнение, найдем $xy = 1$. Так как $\frac{2}{xy+1}=1$, то

$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$ = 2.

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 2022
ЗАДАНИЯ:

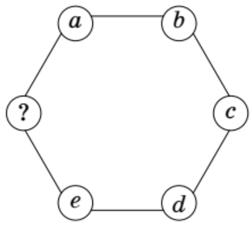
5-6 классы



1. Заполните квадрат размером 6×6 тетраминошками (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать).
2. У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленую траву и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?
3. Под ёлкой лежат 2022 шишки. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берёт 1 или 4 шишки, а Иа-Иа – 1 или 3 шишки. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?
4. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

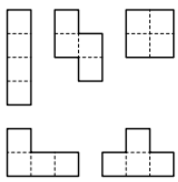
7-8 классы

1. На доске записаны 7 различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число 3/7. Не ошибся ли кто-нибудь из них?
2. Шесть кружков последовательно соединили отрезками. На каждом отрезке записали некоторое число, а в каждом кружке – сумму двух чисел, записанных на входящих в него отрезках. После этого стёрли все числа на отрезках и в одном из кружков (см. рис.). Можно ли найти число, обозначенное знаком вопроса?

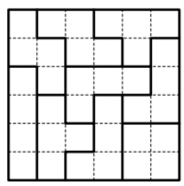


3. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (Победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0).
4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30°$. Найдите $\angle AKD$.

РЕШЕНИЯ:
5-6 классы



1. Заполните квадрат размером 6×6 тетраминошками (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать).
<u>Ответ:</u> например, см. рис. Возможны другие картинки.
<u>Критерии.</u> Приведен только пример, в котором отсутствуют несколько указанных видов фигур (более одного вида) – 0 баллов, приведен только пример, в котором отсутствует ровно один из указанных видов фигур – 1 балл, приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверный – 4 балла, приведен верный пример – 7 баллов.



2. У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленую траву и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?
<u>Ответ:</u> синим закрашено 27 дм^2, зеленым – 33 дм^2, а желтым – 16 дм^2.
<u>Решение.</u> Обозначим через x одну часть, пошедшую на получение зеленой краски. Тогда желтой краской покрашено $(38 – 2x)$ дм^2, зеленой – $3x$ дм^2, а синей – $(38 – x)$ дм^2. Поскольку по условию

зеленым покрашено на 6 дм^2 больше, чем синим, то $3x - 6 = 38 - x$. Отсюда $x = 11$, следовательно, желтой краской покрашено $38 - 2 \cdot 11 = 16$ дм^2, зеленой $3 \cdot 11 = 33$ дм^2, синей $38 - 11 = 27$ дм^2.
Критерии. Только ответ – 1 балл, составлено уравнение или система – 2 балла, найдены 2 площади из 3 или допущена вычислительная ошибка – 5 баллов, полное решение – 7 баллов.

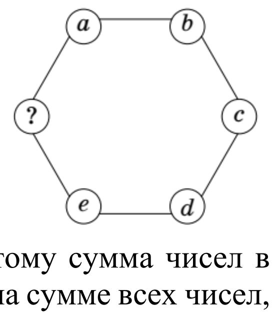
3. Под ёлкой лежат 2022 шишки. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берёт 1 или 4 шишки, а Иа-Иа – 1 или 3 шишки. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?
Ответ: Винни-Пух.
Решение. Первым ходом Винни должен взять 4 шишки, а в дальнейшем, после любого хода Иа-Иа брать каждый раз одну шишку. В этом случае, после каждого хода ослика под ёлкой будет оставаться нечетное количество шишек. Так как количество шишек под елкой постепенно будет уменьшаться, то неизбежно настанет момент, когда под елкой останется одна шишка. Взяв ее, Пух выиграет.
Критерии. Только ответ – 0 баллов, ответ и верная стратегия, но не объяснено, почему стратегия работает – 5 баллов, полное решение – 7 баллов.

4. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?
Ответ: 11.
Решение. *Оценка.* Заметим, что все стулья одновременно занять невозможно, так как в тот момент, когда сядет человек на последний незанятый стул, один из его соседей встанет. Следовательно, одновременно сидящих может быть не больше, чем 11.
Пример. Покажем, как посадить 11 человек. Пронумеруем стулья числами от 1 до 12. Первый стул занять легко. Второй стул займем в два этапа. На первом этапе человек садится на третий стул, а на втором этапе посадим человека на второй стул, а сидящий на третьем стуле встанет. Дальше действуем аналогично: если заняты стулья с номерами от 1 до k, то сначала посадим человека на стул с номером $k + 2$, а затем посадим на стул с номером $k + 1$, освобождая при этом стул с номером $k + 2$. После того как эта операция будет проделана для всех k от 1 до 10, стулья с номерами от 1 до 11 будут заняты, а двенадцатый стул – свободен.
Критерии. Только ответ – 1 балл, ответ и пример – 4 балла, оценка – 2 балла, полное решение – 7 баллов.

7-8 классы

1. На доске записаны 7 различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число 3/7. Не ошибся ли кто-нибудь из них?
Ответ: кто-то из них ошибся.
Решение. Пусть на доске записаны числа a, b, c, d, e, f и g, причем $a < b < c < d < e < f < g$, тогда Танино число равно $(a + b + c + d + e + f + g)/7$, а Данино число – это d. Из условия задачи следует, что $(a + b + c + d + e + f + g)/7 - d = 3/7$, то есть $a + b + c + d + e + f + g - 7d = 3$. После приведения подобных слагаемых это равенство можно записать так: $a + b + c + e + f + g = 6d + 3$. В левой части полученного равенства стоит сумма шести нечетных слагаемых, которая всегда четна, а в правой части стоит число, которое нечетно при любых целых значениях d. Таким образом, это равенство выполняться не может, значит, Таней или Даней допущена ошибка.
Критерии. Только ответ или примеры с ответом – 0 баллов, есть идея чётности – 2 балла, полное решение – 7 баллов.

2. Шесть кружков последовательно соединили отрезками. На каждом отрезке записали некоторое число, а в каждом кружке – сумму двух чисел, записанных на входящих в него отрезках. После этого стёрли все числа на отрезках и в одном из кружков (см. рис.). Можно ли найти число, обозначенное знаком вопроса?



Ответ: да, можно.
Решение. Раскрасим кружки, чередуя два цвета, например, белый и черный. Тогда каждый отрезок войдет по одному разу в кружок каждого цвета, поэтому сумма чисел в белых кружках будет равна сумме чисел в черных кружках (каждая из них равна сумме всех чисел,

которые были записаны на отрезках). Пусть x – стертое число. Тогда $x + b + d = a + c + e$. Из этого равенства однозначно находится значение x ($x = a + c + e - b - d$).

Критерии. Только ответ («можно» или «нельзя») – 0 баллов, указано равенство $x + b + d = a + c + e$ или выражение для x без обоснования – 2 балла, полное решение – 7 баллов.

3. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (Победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0).

Ответ: 13.

Решение. *Оценка.* Докажем, что x не может быть больше, чем 13. Действительно, в каждом матче разыграно либо 3 очка (если победила одна из команд), либо 2 очка (если была ничья). Всего было сыграно $10 \times 9/2 = 45$ матчей, значит, разыграно не более, чем 135 очков, то есть сумма очков, набранных всеми командами, не больше, чем 135. Таким образом, $10x \le 135$, то есть $x \le 13{,}5$. Так как x – целое число, то $x \le 13$.

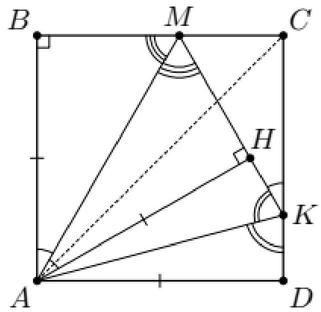
Пример. Покажем, что по 13 очков команды набрать могли. Расположим команды по кругу и разобьём их последовательно на 5 пар. Пусть команды каждой пары сыграли между собой вничью, каждая из них выиграла у четырёх команд, следующих за данной парой по часовой стрелке, а остальным командам проиграла. Тогда каждая команда набрала ровно 13 очков. Аналогичный пример можно предъявить и в виде таблицы.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1		1	3	3	3	3	0	0	0	0	13
2	1		3	3	3	3	0	0	0	0	13
3	0	0		1	3	3	3	3	0	0	13
4	0	0	1		3	3	3	3	0	0	13
5	0	0	0	0		1	3	3	3	3	13
6	0	0	0	0	1		3	3	3	3	13
7	3	3	0	0	0	0		1	3	3	13
8	3	3	0	0	0	0	1		3	3	13
9	3	3	3	3	0	0	0	0		1	13
10	3	3	3	3	0	0	0	0	1		13

Критерии. Только ответ – 1 балл, ответ и пример – 3 балла, оценка – 3 балла, полное решение – 7 баллов.

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30°$. Найдите $\angle AKD$.

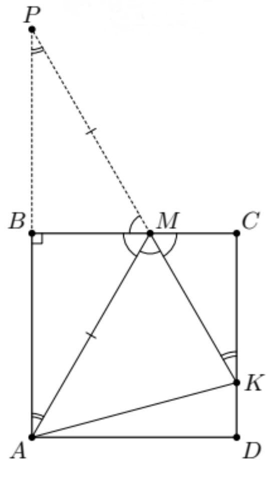
Ответ: 75°.



Решение. Из условия задачи следует, что $\angle BMA = \angle CMK = 60°$, а тогда и $\angle AMK = 60°$ (см. рис. 1). *Первое решение.* Пусть AH – перпендикуляр из вершины A на MK. Тогда прямоугольные треугольники AMB и AMH равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH = AB$. Используя это равенство, получим, что прямоугольные треугольники AKH и AKD равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AKD = 1/2\angle MKD = 150°/2 = 75°$.

В приведенном рассуждении используется, что точка H лежит на отрезке MK, а не на его продолжении за точку K. Это действительно так, иначе бы AH пересекал сторону CD в точке X, но тогда $AH > AX > AD$, что противоречит равенству $AH = AD$. За отсутствие этого пояснения оценка не снижается.

Второе решение. Диагональ CA квадрата является биссектрисой внутреннего угла треугольника CMK, а луч MA – биссектрисой его внешнего угла, поэтому вершина A – центр вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, KA также является биссектрисой внешнего угла треугольника CMK, поэтому $\angle AKD = 1/2\angle MKD = 75°$.



Третье решение. Продлим отрезок KM до пересечения с прямой AB в точке P (см. рис. 2). Тогда $\angle PMB = \angle CMK = \angle AMB$. Следовательно, прямоугольный треугольники PMB и AMB равны (по катету и острому углу), тогда $PB = AB$, то есть $AP = 2a$, где a – сторона данного квадрата, и $PM = AM$. По свойству катета, противолежащего углу в 30° в прямоугольном треугольнике, $AM = 2BM$ и $MK = 2MC$. Следовательно, $PK = PM + MK = 2(BM + MC) = 2BC = 2a$.

Таким образом, треугольник APK – равнобедренный с углом 30° при вершине P, поэтому его угол при основании равен 75°. Так как $\angle MKD = 150°$, а $\angle MKA = 75°$, то $\angle AKD = 75°$.

Критерии. Только ответ – 1 балл, полное решение – 7 баллов.