БАЙКАЛЬСКИЙ ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ-2023
ЗАДАНИЯ:

Турнир математических боёв № 1 А

1. Вася разрезал прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 100. Петя разрезал такой же прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 140. Чему мог быть равен периметр исходного прямоугольника?
2. В зале собрался 21 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт, а хитрец говорит правду, если предыдущий оратор лгал, и лжёт, если предыдущий оратор говорил правду; хитрец никогда не высказывается первым. Все они по очереди выступили, и каждый сказал: «Среди вас двадцати есть хотя бы по одному рыцарю, лжецу и хитрецу». Сколько рыцарей могло быть в зале?
3. В ребусе буквами зашифрованы цифры (одинаковыми буквами одинаковые цифры, разными – разные). ЕЛЬ + ЕЛЬ + … + ЕЛЬ = ЕЛЬНИК. Каким наименьшим и каким наибольшим может быть количество елей в ельнике? Иначе говоря, найдите наибольшее и наименьшее возможное количество слагаемых в левой части ребуса.
4. На доске в ряд выписаны числа 1, 2, …, 2023, каждое покрашено в черный или белый цвет. За один шаг Алина может выбрать три числа такие, что сумма двух из них равна удвоенному третьему, и поменять у этих трех чисел цвет. Алина хочет сделать все числа черными. Верно ли, что из любой изначальной раскраски Алине удастся осуществить желаемое?
5. Петя утверждает, что может расставить числа от 1 до 20 в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число в середине ребра оказалось вдвое меньше, чем сумма чисел, записанных в концах этого ребра? Прав ли Петя?
6. Саша складывает четыре числа: два натуральных числа, их НОД и их НОК. Верно ли, что он может получить в результате любое натуральное число, большее 1000?

Турнир математических боёв № 1 B

1. Вовочка захотел разрезать прямоугольник 4×7 клеток на фигурки двух видов – уголки из трех клеток и фигуры из 4 клеток вида буквы Т. Сколько могло получиться фигур из 4 клеток? Фигурки можно поворачивать, могут присутствовать фигурки только одного вида или обоих видов.
2. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке I. На стороне BC отметили точку D. Оказалось, что $AI = BD$, $AC = CD$, $\angle ABC = 42°$. Найдите: $\angle ACB$.
3. Дан граф с $n \geq 3$ вершинами, в котором проведены все возможные ребра. Ребра покрашены в 3 цвета так, что все цвета встречаются, и для любых трёх вершин три ребра, соединяющие их, либо все одного цвета, либо все разных цветов. Для каких n такая раскраска существует?
4. Из клетчатого квадрата 9×9, столбцы и строки которого пронумерованы числами от 1 до 9, вырезали все клетки, обе координаты которых чётны. Сколькими способами в оставшейся фигуре можно выделить трёхклеточный уголок?
5. Незнайка написал несколько ненулевых целых чисел, произведение которых в 5 раз больше их суммы. Он написал ещё одно целое число и утверждает, что теперь произведение чисел в 6 раз больше их суммы. Могут ли слова Незнайки быть правдой?
6. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$. Докажите, что $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$.

Турнир математических боёв № 1 C

1. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70°$ и $\angle B = 100°$. Чему могут быть равны углы C и D?
2. Есть два одинаковых правильных шестиугольника. Можно ли их разрезать на несколько частей (в сумме не более шести) так, чтобы из всех этих частей можно было сложить равносторонний треугольник?
3. Найдите наименьшее простое p такое, что $p^p - 1$ делится на 24.
4. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки пяти различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Всегда ли можно гарантированно добиться трёх одноцветных пар соседей?

5. При каких натуральных n таблицу $n \times n$ можно заполнить числами 1; 2 и –3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равнялась 0?
6. Пусть a и b – положительные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $ab + \left(a + \frac{2}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right)$?

Турнир математических боёв № 2 А

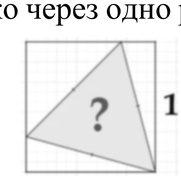
1. В десятизначном числе, делящемся на 90, цифры заменили буквами, одинаковые – одинаковыми, разные – разными. Получилось слово ХРИЗАНТЕМА. Из какого количества чисел такое могло произойти?
2. В центре психологической разгрузки работают котики, собачки, зайчата и лошадки. Зайчат вдвое больше, чем лошадок. Собачки и зайчата составляют четверть от общего числа зверят, а лошадки и собачки – пятую часть. Докажите, что число котиков делится на 7.
3. Каких пятизначных палиндромов больше – делящихся на 5 или делящихся на 9? (Палиндром – это число, одинаково читающееся слева направо и справа налево).
4. На доске 18×18 есть 324 единичных квадрата. Можно ли окрасить в синий цвет ровно 196 отрезков, являющихся сторонами этих квадратов, так, чтобы у каждого единичного квадрата ровно одна сторона оказалась синей?
5. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?
6. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 2022 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 2022. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Турнир математических боёв № 2 В

1. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AKM и CLN. Докажите, что $BN = CM$.
2. Известно, что $ac + ad + bc + bd = 30$, $c + d = 5$. Какие значения может принимать сумма $a + b + c + d$?
3. Мама испекла блины и разложила их по тарелкам: на первой тарелке один блин, на второй два, …, на 15-й тарелке – 15. Время от времени в кухню забегает сын и съедает по некоторому одинаковому числу блинов с нескольких тарелок. За какое наименьшее число визитов сын сможет съесть все блины?
4. Можно ли в вершинах правильного восьмиугольника расставить числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 таким образом, чтобы суммы чисел, расположенных в любых трех соседних вершинах, были больше 9?
5. Найдите 2023-е по счету натуральное число, которое нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.
6. Пусть $a_1 = 1$, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, $a_8 = N$ – все различные делители натурального числа N**,** выписанные в порядке возрастания. Известно, что $a_3 = a_2 + 1$, $a_5 = a_2 a_3$. Найдите N.

Турнир математических боёв № 2 С

1. В ряд выписано четыре натуральных числа. Произведение любых двух соседних – квадрат натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних – квадрат натурального числа.
2. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a - b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?
3. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).
4. Найдите все пары действительных чисел (x; y), удовлетворяющих уравнению $x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}$.
5. Найдите площадь правильного треугольника, расположенного в квадрате (см. рис.).



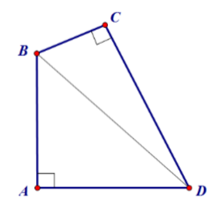
6. Сколько существует вариантов заполнения клеток таблицы 2023 × 2023 натуральными числами таким образом, чтобы сумма любых трёх соседних чисел в одной строке или столбце была равна 4?

Турнир математических боёв № 3 А

1. В вершинах A и C прямоугольника $ABCD$ сидит по муравью. Эти муравьи одновременно начинают двигаться по контуру прямоугольника с постоянными скоростями: один по часовой стрелке, другой – против. В первый раз эти муравьи встретились в вершине D, а во второй раз – в вершине A. Найдите длину стороны AD прямоугольника, если его периметр равен 45.
2. В первую минуту суток на электронных часах горит 00:00, а в последнюю – 23:59. Сколько времени в течении суток на часах горит хотя бы одна единица и нет ни одной двойки?
3. Лида записала все натуральные числа, состоящие из одиннадцати троек и трёх семёрок. Найдите наибольший общий делитель всех выписанных Лидой чисел.
4. На белой доске 8×8 чётное число клеток покрашены в черный цвет. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Верно ли, что менее чем за 40 ходов он сможет покрасить в чёрный цвет всю доску?
5. Рассмотрим все 9-значные числа, получающиеся перестановками цифр от 1 до 9. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма трёх таких чисел?
6. Существует ли такое натуральное число, у которого при умножении на 3 сумма цифр уменьшается ровно в 6 раз?

Турнир математических боёв № 3 В

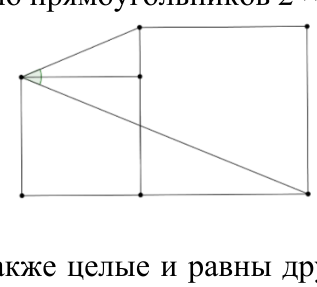
1. Виталий вел дневник наблюдений за погодой. Оказалось, что в последний день наблюдений количество дождливых дней составляло n% прошедших с начала наблюдений, хотя на день раньше дождливых дней было (n – 1)% от наблюдаемых дней к тому моменту. (n – натуральное число). Какое наименьшее количество дней вел дневник Виталий?
2. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = AD$, углы A и C – прямые. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC + CD = 12$.



3. Известно, что $a^3 + b^3 = a – b$, где $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $a^2 + b^2 < 1$.
4. Квадратная таблица 8 × 8 заполнена числами от 1 до 64, каждое число использовано по одному разу. Докажите, что найдутся хотя бы четыре квадратика 2 × 2, в каждом из которых сумма чисел не меньше 100. Квадратики могут накладываться друг на друга.
5. Клетчатый прямоугольник 5 × 6 разрезали на прямоугольники 2 × 3 и уголки из трёх клеток так, что никакие два уголка не образуют прямоугольник 2 × 3. Какое наименьшее число прямоугольников 2 × 3 могло быть использовано?
6. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют условию НОД($2a + b$; $2c + d$) = 2023. Докажите, что $ad – bc$ делится на 2023.

Турнир математических боёв № 3 С

1. В клетках таблицы 9 × 9 расставлены целые ненулевые числа. Докажите, что можно сменить знак у не более чем 40 чисел так, чтобы каждое из чисел отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).
2. Даны четыре натуральных числа. Для каждой пары чисел посчитали их наибольшие общие делители, в результате получились числа 2, 3, 4, 5, 6 и 9. Какова наименьшая возможная сумма этих чисел?
3. Клетчатый прямоугольник 5 × 6 разрезали на прямоугольники 2 × 3 и уголки из трёх клеток так, что никакие два уголка не образуют прямоугольник 2 × 3. Какое наименьшее число прямоугольников 2 × 3 могло быть использовано?
4. Можно ли отметить 5 точек в вершинах клеток шахматной доски 8 × 8 так, чтобы расстояния между любыми двумя отмеченными точками было целым (на одной прямой не более трёх точек)?
5. Площадь большого квадрата на рисунке в два раза больше площади маленького квадрата. Найдите величину угла, отмеченного на рисунке.



6. Существуют ли различные целые числа x и y такие, что числа $\frac{x^2+x}{y^2+y}$ и $\frac{x^2+2}{y^2+2}$ также целые и равны друг другу?

РЕШЕНИЯ:

Турнир математических боёв № 1 А

1. Вася разрезал прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 100. Петя разрезал такой же прямоугольник на два прямоугольника, сумма периметров которых равна 140. Чему мог быть равен периметр исходного прямоугольника?

Ответ: 80.

Решение. Пусть стороны прямоугольника равны a и b. Вася резал прямоугольник параллельно одной паре сторон, а Петя – параллельно другой. При этом сумма периметров прямоугольников у одного из них получилась равной $2a + 4b$, а у другого – $2b + 4a$. В сумме это даёт $6a + 6b$, то есть утроенный периметр исходного прямоугольника. Таким образом, периметр исходного прямоугольника равен (100+140)/3 = 80.

2. В зале собрался 21 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт, а хитрец говорит правду, если предыдущий оратор лгал, и лжёт, если предыдущий оратор говорил правду; хитрец никогда не высказывается первым. Все они по очереди выступили, и каждый сказал: «Среди вас двадцати есть хотя бы по одному рыцарю, лжецу и хитрецу». Сколько рыцарей могло быть в зале?

Ответ: 0 или 19.

Решение. Рыцарей может быть 0, например, в случае, когда все присутствующие – лжецы. Теперь рассмотрим случай, когда рыцари есть. Рыцарь говорит правду, значит, есть ещё и лжец, и хитрец. Если лжецов хотя бы 2, то они скажут правду, чего быть не может. Если хитрецов хотя бы 2, то они должны все говорить правду, но правду может сказать только один, стоящий после лжеца. Получаем, что всего 19 рыцарей, 1 лжец и 1 хитрец, стоящий после некоторого рыцаря.

3. В ребусе буквами зашифрованы цифры (одинаковыми буквами одинаковые цифры, разными – разные). ЕЛЬ + ЕЛЬ + … + ЕЛЬ = ЕЛЬНИК. Каким наименьшим и каким наибольшим может быть количество елей в ельнике? Иначе говоря, найдите наибольшее и наименьшее возможное количество слагаемых в левой части ребуса.

Ответ: Наименьшее количество – 1002, наибольшее – 1009.

Решение. *Оценки*. Пусть всего n деревьев. Тогда $n \times$ ЕЛЬ = 1000 × ЕЛЬ + НИК. Очевидно, что НИК делится на ЕЛЬ, причём частное хотя бы 2. Тогда $n \geq 1002$. Так как НИК не может превосходить ЕЛЬ больше, чем в 9 раз, то $n \leq 1009$. *Примеры*: $n = 1002$ при ЕЛЬ = 135, НИК = 270, $n = 1009$ при ЕЛЬ = 103, НИК = 927.

4. На доске в ряд выписаны числа 1, 2, …, 2023, каждое покрашено в черный или белый цвет. За один шаг Алина может выбрать три числа такие, что сумма двух из них равна удвоенному третьему, и поменять у этих трех чисел цвет. Алина хочет сделать все числа черными. Верно ли, что из любой изначальной раскраски Алине удастся осуществить желаемое?

Ответ: Верно.

Решение. Покажем, что мы можем изменить цвет одного числа, не изменив при этом цвета никаких других чисел. Тогда, очевидно, мы из любой раскраски сможем получить черную. Пусть мы хотим изменить цвет числа x, и пусть, не умаляя общности, справа от него есть ещё хотя бы 6 чисел. Тогда делаем замены в тройках $(x, x + 3, x + 6)$, $(x + 3, x + 4, x + 5)$, $(x + 4, x + 5, x + 6)$. Все числа, кроме x, изменились четное число раз, а x – нечетное.

5. Петя утверждает, что может расставить числа от 1 до 20 в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число в середине ребра оказалось вдвое меньше, чем сумма чисел, записанных в концах этого ребра? Прав ли Петя?

Ответ: нет.

Решение. Предположим противное. Заметим, что сумма чисел в концах каждого ребра чётна, поэтому записанные в вершинах числа – одной чётности. Но числа 1 и 20 не могут быть равны полусуммам каких-то двух чисел от 1 до 20 и поэтому они должны стоять в вершинах, а они разной чётности – противоречие.

6. Саша складывает четыре числа: два натуральных числа, их НОД и их НОК. Верно ли, что он может получить в результате любое натуральное число, большее 1000?

Ответ: неверно.

Решение 1. Обозначим выбранные Сашей числа за a и b. Пусть a и b имеют общий делитель $d > 1$. Тогда все слагаемые в Сашиной сумме кратны d, поэтому результат – составное число. В противном случае числа a и b взаимно просты, то есть их НОД равен 1, а их НОК равен ab. Значит, Саша получил $1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b)$, это число вновь составное. Поскольку простых чисел бесконечно много, существует простое число p, большее 1000. Его Саша получить не мог.

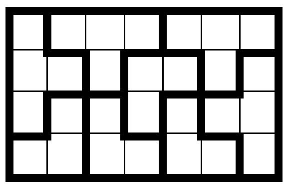
Решение 2. Пусть исходные два числа Саши были a и b. Если каждое из чисел a и b чётно, то каждое из слагаемых в Сашиной сумме чётно. Если каждое из чисел a и b нечётно, то каждое из слагаемых в Сашиной сумме нечётно. Если же одно из чисел a и b чётно, а другое – нечётно, то НОД (a, b) нечётен, а НОК (a, b) – чётно. Итак, в любом случае Сашина сумма чётна, поэтому не может равняться ни одному нечётному числу, большему 1000.

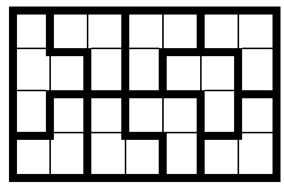
Турнир математических боёв № 1 В

1. Вовочка захотел разрезать прямоугольник 4×7 клеток на фигурки двух видов – уголки из трех клеток и фигуры из 4 клеток вида буквы Т. Сколько могло получиться фигур из 4 клеток? Фигурки можно поворачивать, могут присутствовать фигурки только одного вида или обоих видов.

Ответ: 1 и 4.

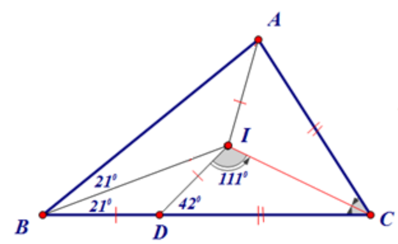
Решение. Так как 28 делится на 4, то количество уголков должно делиться на 4. Тогда уголков может быть 0, 4, 8, а Т-тетраминошек соответственно 7, 4 и 1. Для проверки случая 7 раскрасим доску в шахматную раскраску. Тогда в каждой тетраминошке должно быть 3 черных и одна белые клетки или 3 белых и одна чёрная. Пусть первых x, тогда вторых $7 - x$. Посчитаем чёрные клетки: $3x + 7 - x = 14$ или $2x = 7$. Так не бывает. Примеры для 4 и для 1 тетраминошки приводятся.





2. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке I. На стороне BC отметили точку D. Оказалось, что $AI = BD$, $AC = CD$, $\angle ABC = 42°$. Найдите: $\angle ACB$.

Ответ: 54°.



Решение 1. Треугольники ACI и DCI равны по 1 признаку. Тогда $AI = DI$, треугольник BDI – равнобедренный. $\angle DBI = 21°$ (BI – биссектриса), $\angle CDI = 42°$, как внешний угол треугольника BDI.

$\angle AIC = 180° - \frac{180°-42°}{2} = 111°$. $\angle CID = \angle AIC = 111°$.

$\angle DCI = 180° - 42° - 111° = 27°$. Тогда $\angle ACB = 54°$.

3. Дан граф с $n \geq 3$ вершинами, в котором проведены все возможные ребра. Ребра покрашены в 3 цвета так, что все цвета встречаются, и для любых трёх вершин три ребра, соединяющие их, либо все одного цвета, либо все разных цветов. Для каких n такая раскраска существует?

Ответ: 3 и 4.

Решение. Граф с тремя вершинами и рёбрами трёх цветов подходит. Если в графе 4 вершины и рёбра, не имеющие общих концов, одного цвета, то все треугольники либо одноцветные, либо имеют стороны всех цветов. Рассмотрим граф с не менее, чем 5 вершинами. Выберем вершину A, из которой выходят рёбра хотя бы двух цветов. Тогда рёбер одного цвета, выходящих из неё, хотя бы два. Пусть AB и AC – красные, AD – синее. Тогда BC – красное, BD и CD – третьего цвета (пусть зелёные). Треугольник BCD противоречит условию задачи.

4. Из клетчатого квадрата 9×9, столбцы и строки которого пронумерованы числами от 1 до 9, вырезали все клетки, обе координаты которых чётны. Сколькими способами в оставшейся фигуре можно выделить трёхклеточный уголок?

Ответ: 64 способа.

Решение. Вокруг каждой из 16 вырезанных клеток можно разместить 4 уголка, любой уголок размещается вокруг одной из вырезанных клеток и вокруг разных вырезанных клеток размещаются разные уголки. Значит, способов вырезать $16 \times 4 = 64$.

5. Незнайка написал несколько ненулевых целых чисел, произведение которых в 5 раз больше их суммы. Он написал ещё одно целое число и утверждает, что теперь произведение чисел в 6 раз больше их суммы. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

Ответ: могут.

Решение. Пусть изначально были числа – 1, – 2 и 5. Тогда первое условие выполняется: $(-1) \cdot (-2) \cdot 5 = 10 = 5 \cdot (-1 - 2 + 5)$. Добавим число 3.

Тогда $(-1) \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 3 = 30 = 6 \cdot (-1 - 2 + 5 + 3)$.

6. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$. Докажите, что $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$.

Решение. $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2 + ab)$. Поэтому данное в условии равенство равносильно равенству $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Возводя это равенство в квадрат, получаем $a^4 + b^4 + 3a^2b^2 + 2a^3b + 2ab^3 = c^4 + d^4 + 3c^2d^2 + 2c^3d + 2cd^3$.

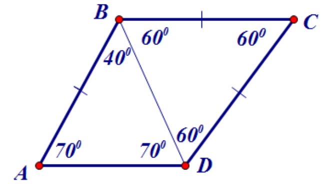
Раскроем скобки в правой части равенства, которое нужно доказать.

$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 3a^2b^2 + 2a^3b + 2ab^3)$, что в 2 раза больше полученного выражения.

Турнир математических боёв № 1 С

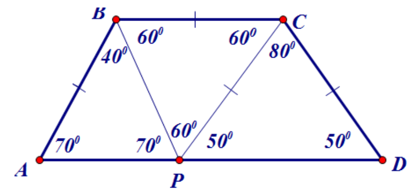
1. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70°$ и $\angle B = 100°$. Чему могут быть равны углы C и D?

Ответ: 60° и 130° или 50° и 140°.



Решение 1. Выберем точку P на прямой AD так, чтобы $BP = AB$.

Пусть точка P совпадает с D. Тогда ABD – равнобедренный треугольник, $\angle ADB = 70°$, $\angle ABD = 40°$, $\angle DBC = 60°$, BCD – равносторонний треугольник, $\angle BCD = 60°$, $\angle ADC = 70° + 60° = 130°$.



Пусть точка P лежит на стороне AD. Тогда ABP – равнобедренный треугольник, $\angle APB = 70°$, $\angle ABP = 40°$, $\angle PBC = 60°$, BCP – равносторонний треугольник, $\angle BPC = 60°$, $\angle CPD = 180° - 70° - 60° = 50°$. PCD – равнобедренный треугольник, $\angle ADC = 50°$, $\angle PCD = 80°$.

$\angle BCD = 60° + 80° = 140°$.

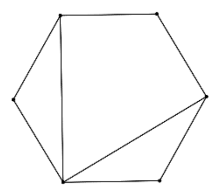
Пусть точка P лежит продолжении стороны AD за точку D. Тогда ABP – равнобедренный треугольник, $\angle APB = 70°$, $\angle ABP = 40°$, $\angle PBC = 60°$, BCP – равносторонний треугольник, $\angle BPC = 60°$. Треугольник CPD – равнобедренный с углом при основании $\angle CPD = 60° + 70° = 130°$. Так не может быть.

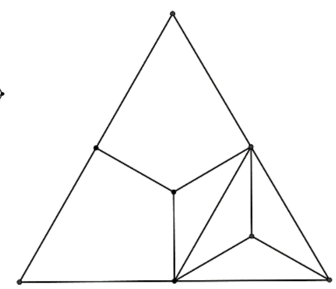
Решение 2. Проведём AC и опустим перпендикуляры CM на AD (точка M на стороне AD или её продолжении) и BK на AC. Треугольник ABC – равнобедренный, углы при основании по 40°, тогда $\angle CAD = 30°$, треугольник ACM – прямоугольный, $AC = 2CM$. BK – высота равнобедренного треугольника, а значит, биссектриса и медиана. Тогда треугольники CMD и CKB равны по катету и гипотенузе, тогда $\angle CDM = 50°$. Если M лежит на стороне AD, то $\angle ADC = 50°$, $\angle BCD = 360° - 100° - 70° - 50° = 140°$. Если же M лежит на продолжении стороны AD, то $\angle ADC = 180° - 50° = 130°$, $\angle BCD = 360° - 100° - 70° - 130° = 60°$.

2. Есть два одинаковых правильных шестиугольника. Можно ли их разрезать на несколько частей (в сумме не более шести) так, чтобы из всех этих частей можно было сложить равносторонний треугольник?

Ответ: да.

Решение. Разрежем оба шестиугольника, как показано на рисунке и переложим в треугольник, как показано на втором рисунке.





3. Найдите наименьшее простое p такое, что $p^p - 1$ делится на 24.

Ответ: 73.

Решение. Очевидно, $p = 2$ не подходит. Значит, p – нечётное. $p = 3$ также не подходит. Тогда $p^p - 1 = (p - 1)(p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p + 1)$. Второй множитель содержит нечётное число нечётных слагаемых (p слагаемых), значит, $p - 1$ делится на 8. В первой сотне только простые числа 17, 41, 73, 89, 97 удовлетворяют этому условию. Остаётся проверить делимость на 3. Очевидно, число 73 подходит, 73 – 1 делится на 24. 17 и 41 при делении на 3 дают остаток 2, значит, первый множитель $(p - 1)$ на 3 не делится, во втором множителе чередуются остатки 1 и 2, но при нечётном числе слагаемых остатки не компенсируют друг друга.

4. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки пяти различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Всегда ли можно гарантированно добиться трёх одноцветных пар соседей?

Ответ: нет.

Решение. Приведём пример ситуации, в которой больше двух пар получить нельзя. Расположим фишки цветов 1 рядом и фишки цветов 2 тоже, они разбивают круг на две дуги, фишки остальных цветов расположим по одной в каждой из этих дуг. Тогда никаких новых одноцветных пар соседей не образуется, потому что с фишками цветов 1 и 2 местами уже ничто не поменяется.

5. При каких натуральных n таблицу $n \times n$ можно заполнить числами 1; 2 и –3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равнялась 0?

Ответ. При любых $n \geq 3$.

Решение. Очевидно, при $n = 1$, $n = 2$ нельзя. При $n = 3$ заполним первую строку таблицы так: 1, 2, –3. При $n = 4$ первую строку заполняем так: 1, 1, 1, –3. При $n = 5$ первую строку заполняем так: 2, 2, 2, –3, –3. Остальные строки получим из первой циклическими сдвигами. Для значений $n > 5$ к строке, соответствующей $n - 3$, добавляем три числа: 1, 2, –3.

6. Пусть a и b – положительные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $ab + \left(a + \frac{2}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right)$?

Ответ: 7.

Решение. Раскроем скобки и сгруппируем, получим $2ab + \frac{2}{ab} + 3$, или $2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) + 3$. Поскольку $x + \frac{1}{x} \geq 2$ для положительных значений x (неравенство Коши), полученное выражение всегда не меньше $2 \cdot 2 + 3 = 7$ и при $a = b = 1$ в точности равно семи.

Турнир математических боёв № 2 А

1. В десятизначном числе, делящемся на 90, цифры заменили буквами, одинаковые – одинаковыми, разные – разными. Получилось слово ХРИЗАНТЕМА. Из какого количества чисел такое могло произойти?

Ответ: 8! = 40320.

Решение. Так как число делится на 90, значит, делится на 9 и 10. Тогда А = 0. Кроме А каждая буква встречается 1 раз и их 8. Значит, надо убрать 1 цифру из ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сумма всех цифр 45, значит, надо убрать 9 (иначе нарушится делимость на 9). Значит, остальные цифры можно расставить 8! способами (количество перестановок из 8 элементов).

2. В центре психологической разгрузки работают котики, собачки, зайчата и лошадки. Зайчат вдвое больше, чем лошадок. Собачки и зайчата составляют четверть от общего числа зверят, а лошадки и собачки – пятую часть. Докажите, что число котиков делится на 7.

Решение. Из условия получаем $z = 2l$, $4(s + z) = k + s + z + l$, $5(l + s) = k + s + z + l$. Тогда $4s + 8l = k + s + 2l + l$ и $5l + 5s = k + s + 2l + l$, а, значит, $k = 3s + 5l$ и $k = 4s + 2l$. Приравнивая правые части, получаем $s = 3l$, откуда $k = 14l$, а, значит, k делится на 7.

3. Каких пятизначных палиндромов больше – делящихся на 5 или делящихся на 9? (Палиндром – это число, одинаково читающееся слева направо и справа налево).

Ответ: поровну (по 100).

Решение. Рассмотрим числа вида $\overline{abcba}$. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 0 или 5, тогда $a = 5$ (с 0 число начинаться не может). Для остальных цифр – по 10 вариантов, всего 100 чисел. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Цифра a пробегает все числа от 1 до 9, цифра b – от 0 до 9. Всего 90 вариантов. Но при некоторых из них есть два варианта цифры c (0 и 9, если $2(a + b)$, а, значит, $a + b$ делится на 9), в остальных – по 1 варианту. Два варианта, если a и b равны 18, 27, 36, …, 90 и 99, всего 10 случаев. Значит, чисел, делящихся на 9 – 100 штук.

4. На доске 18×18 есть 324 единичных квадрата. Можно ли окрасить в синий цвет ровно 196 отрезков, являющихся сторонами этих квадратов, так, чтобы у каждого единичного квадрата ровно одна сторона оказалась синей?

Ответ: можно.

Решение. Покрасим левую и правую границы доски и верхнюю границу без левого и правого квадратика. Дальше красим границы вертикально, отступая по 2 клетки слева направо, не доводя их на 1 клетку доверху и 1 клетку донизу. Тогда у каждой клетки покрашена ровно одна сторона. Всего их $18 + 18 + 16 + 16 + 16 \cdot 8 = 68 + 128 = 196$.

5. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

Ответ: 4 нуля.

Решение. *Оценка*. Сумма цифр числа не более 36. Значит, может дать не более двух множителей 5, и не более пяти множителей 2. Причём в самом числе не может быть одновременно множителей 2 и 5. Тогда нулей в конце произведения не больше 5, причём все множители 5 относятся к самому числу (иначе в сумме цифр не больше двух множителей 2 и нулей не больше двух). Если в числе пять множителей 5, то оно делится на 3125. Возможные кандидаты: 3125 (сумма цифр нечётная, получаем 0 нулей), 9375 (получаем 225000, 3 нуля). Значит, 5 нулей получить нельзя. Не более 4 нулей.

Пример. 8125   16 = 130000.

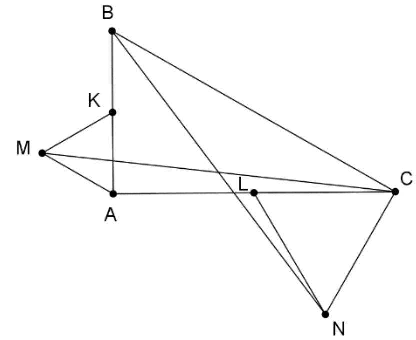
6. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 2022 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 2022. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Ответ: выиграет Алиса.

Решение. $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Первый ход Алисы – число $1011 = 3 \cdot 337$. Тогда Вера не сможет взять никакого чётного числа. После этого игра идёт только на нечётных числах. Их останется 1010, последний ход – Алисы. После этого Вера будет вынуждена сделать проигрышный ход.

Турнир математических боёв № 2 B

1. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AKM и CLN. Докажите, что $BN = CM$.



Решение. Подсчётом углов получаем, что $MBCN$ – прямоугольник. По свойству прямоугольника его диагонали BN и CM равны. Можно доказать равенство треугольников BCM и CBN.

2. Известно, что $ac + ad + bc + bd = 30$, $c + d = 5$. Какие значения может принимать сумма $a + b + c + d$?

Ответ: 11.

Решение. Из условия получаем, что $(a + b)(c + d) = 30$, а так как $c + d = 5$, то $a + b = 6$ и тогда $a + b + c + d = 11$.

3. Мама испекла блины и разложила их по тарелкам: на первой тарелке один блин, на второй два, …, на 15-й тарелке – 15. Время от времени в кухню забегает сын и съедает по некоторому одинаковому числу блинов с нескольких тарелок. За какое наименьшее число визитов сын сможет съесть все блины?

Ответ: за 4.

Решение. Максимальное число тарелок, на которых остается поровну блинов после визита сына, может за один визит увеличиться не более чем вдвое, а после последнего визита оно равно 15, поэтому было не менее 4 визитов. Пример на 4: съедаем в первый визит по 8 блинов с тарелок 8-15, получаем 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Во второй визит съедаем по 4 блина с тарелок 4-7, 12-15. Получим 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3. В третий визит по 2 блина с тарелок, на которых 2 или 3 блина, получим 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1. В четвертый визит съедаем все оставшиеся блины.

4. Можно ли в вершинах правильного восьмиугольника расставить числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 таким образом, чтобы суммы чисел, расположенных в любых трех соседних вершинах, были больше 9?

Ответ: нельзя.

Решение. Допустим это сделать можно. Тогда одно из чисел, расположенных в вершине восьмиугольника, соседней с вершиной с числом 7, не меньше 2. Рассмотрим все остальные вершины. Сумма чисел в них не больше 19. Значит в одной из двух оставшихся троек последовательных вершин сумма чисел не больше 9.

5. Найдите 2023-е по счету натуральное число, которое нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

Ответ: 2067.

Решение. Чисел, указанного вида, меньших 2023, всего 44, т.к. $44 \cdot 45 = 1980 < 2023$, а $45 \cdot 46 = 2070 > 2023$. Тогда 2023-е число равно $2023 + 44 = 2067$. Так как $2067 < 2070$, то оно и является искомым.

6. Пусть $a_1 = 1$, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, $a_8 = N$ – все различные делители натурального числа N**,** выписанные в порядке возрастания. Известно, что $a_3 = a_2 + 1$, $a_5 = a_2 a_3$. Найдите N.

Ответ: $N = 24$ или $N = 30$.

Решение. Так как из чисел a_2 и a_3 одно всегда четное, то $a_2 = 2$ и $a_3 = 3$. Поэтому $a_5 = 6$, тогда $a_4 = 4$ или $a_4 = 5$. Отсюда $N = 24$ или $N = 30$.

Турнир математических боёв № 2 C

1. В ряд выписано четыре натуральных числа. Произведение любых двух соседних – квадрат натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних – квадрат натурального числа.

Решение 1. Пусть $ab = m^2$, $bc = n^2$. Тогда $ab^2c = (mn)^2$. Значит, mn делится на b. Полагая $mn = bk$, получаем, что $ac = k^2$. Таким образом, произведение любых двух чисел, идущих через одно, также является квадратом натурального числа. Аналогично доказывается, что произведение двух чисел, идущих через два, также является квадратом натурального числа, что в данном случае уже достаточно.

Решение 2. Произведение двух чисел является квадратом натурального числа тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в разложение каждого из этих двух чисел в степенях одной и той же чётности. Но если это так для любых двух соседних чисел, то это так и для любых двух данных чисел вообще.

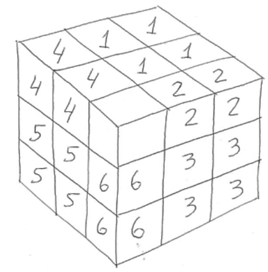
2. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a - b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

Ответ: 4.

Решение. Пусть 1 – синяя. Пусть k – наибольшее синее число. Тогда все числа, меньшие k – синие, а все числа, большие k – красные. Если есть хотя бы два красных числа, то есть и два соседних числа красного цвета, а тогда и число 1 должно быть красным. Противоречие. Поэтому чисел красного цвета либо нет, либо такое число – 100. Обе эти раскраски подходят. Учитывая, что единицу можно покрасить двумя способами, получаем ответ 4.

3. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

Ответ: 16.



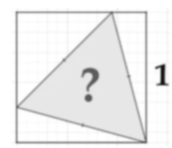
Решение. *Оценка*. Чтобы оклеить 3 единичных квадратика, примыкающих к одной вершине куба, нужны, по крайней мере, 2 квадрата. Итак, всего надо не менее 16 квадратов. *Пример*. На рисунке показано, как шестью квадратами оклеить три грани куба без одного кубика. Ещё двух квадратов, очевидно, хватит для оклеивания оставшегося кубика. На противоположные три грани куба нужны ещё 8 квадратов.

4. Найдите все пары действительных чисел (x; y), удовлетворяющих уравнению $x^2+(y-1)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}$.

Ответ: $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

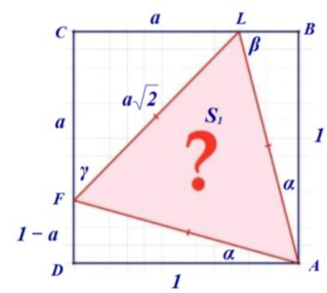
Решение. Раскроем скобки и умножим обе части на 3. $6x^2 + 6y^2 - 6xy - 6y + 2 = 0$. Умножим обе части на 6 (чтобы выделить квадрат из $6x^2$). Получаем $36x^2 - 36xy + 9y^2 + 27y^2 - 36y + 12 = 0$ или $(6x - 3y)^2 + 3(3y - 2)^2 = 0$. Отсюда $y = 2x$ и $3y = 2$, откуда получаем ответ.

5. Найдите площадь правильного треугольника, расположенного в квадрате (см. рис.).



Ответ: $2\sqrt{3}-3$.

Решение. Пусть треугольник AFL вписан в квадрат $ABCD$ (точка L на BC). Треугольники AFD и ALB равны по катету и гипотенузе. Обозначим $CF = CL = a$, $FL = a\sqrt{2}$, $FD = 1 - a$. Тогда $S_1=\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=1-\frac{a^2}{2}-(1-a)$, откуда $a=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$. $S_1=\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{3-\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-3$.



6. Сколько существует вариантов заполнения клеток таблицы 2023 × 2023 натуральными числами таким образом, чтобы сумма любых трёх соседних чисел в одной строке или столбце была равна 4?

Ответ: 6 вариантов.

Решение. В таблице 2 × 2, находящейся в левом верхнем углу таблицы 2023 × 2023:

- нет чисел больше 2, иначе сумма трёх соседних чисел в одной строке или столбце будет больше чем 4 (Значит, таблица 2 × 2 заполнена числами 1 и 2);
- нет двух двоек на одной линии, иначе сумма трёх соседних чисел будет больше 4;
- нет трёх двоек, иначе есть две двойки на одной линии, значит, двоек не больше двух, причем их можно ставить только по одной из двух диагоналей таблицы 2 × 2, всего 2 варианта.
- вариантов заполнить таблицу с одной двойкой – 4.
- таблица без двоек – единственная, но она не подходит, так как тогда в следующей линии две двойки.
- если числа a и b стоят рядом на одной линии, то соседнее число определяется однозначно это $4 - a - b$. Значит заполнение таблицы 2 × 2, находящейся в левом верхнем углу, однозначно определяет всю расстановку.

Значит, всего 6 вариантов. Диагональ с двойками чередуется с двумя диагоналями с 1. Три разных начала и два разных направления.

Турнир математических боёв № 3 А

1. В вершинах A и C прямоугольника $ABCD$ сидит по муравью. Эти муравьи одновременно начинают двигаться по контуру прямоугольника с постоянными скоростями: один по часовой стрелке, другой – против. В первый раз эти муравьи встретились в вершине D, а во второй раз — в вершине A. Найдите длину стороны AD прямоугольника, если его периметр равен 45.

Ответ: 15.

Решение. Понятно, что оба муравья поползли к вершине D, иначе их первая встреча случиться в этой вершине не могла бы. Тогда получается, что к моменту второй встречи муравей, который стартовал из вершины A, прополз весь контур прямоугольника, а второй муравей — половину контура (стороны CD и DA). Значит, первый муравей ползёт вдвое быстрее второго. Так как к моменту первой встречи первый муравей прополз сторону AD, а второй – сторону CD, получаем, что $AD = 2CD$. По условию $2(AD + CD) = 45$, откуда $CD = 7{,}5$ и $AD = 15$.

2. В первую минуту суток на электронных часах горит 00:00, а в последнюю – 23:59. Сколько времени в течении суток на часах горит хотя бы одна единица и нет ни одной двойки?

Ответ: 554 минуты. Решение. Подсчитаем, сколько раз встречаются числа без двоек. Первая цифра – 0 или 1 (две возможности), вторая – одна из 9 (все, кроме 2), третья – одна из пяти (0, 1, 3, 4 или 5), четвёртая – одна из 9. Итак, всего чисел без двоек $t = 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 9 = 810$. Теперь подсчитаем, сколько раз встречаются числа и без единиц, и без двоек. Первая цифра – обязательно 0, вторая – одна из восьми (все, кроме 1 и 2), третья – одна из четырёх (0, 3, 4 или 5), четвёртая – одна из 8. Итак, всего $s = 8 \cdot 4 \cdot 8 = 256$. Разность $t - s$ – это количество минут без двоек, но с единицами,

810 – 256 = 554.

3. Лида записала все натуральные числа, состоящие из одиннадцати троек и трёх семёрок. Найдите наибольший общий делитель всех выписанных Лидой чисел.

Ответ: 9.

Решение. Сумма цифр в каждом числе 54, значит, они делятся на 9. Рассмотрим разность двух таких чисел, она должна делиться на наибольший общий делитель. 33…7377 – 33…3777 = 3600. $3600 = 2^4\ 3^2\ 5^2$. Так как все числа Лиды нечётные и не делятся на 5, то в наибольшем общем делителе могут быть лишь две тройки, то есть, 9.

4. На белой доске 8×8 чётное число клеток покрашены в черный цвет. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Верно ли, что менее чем за 40 ходов он сможет покрасить в чёрный цвет всю доску?

Ответ: да.

Решение. Заметим, что после любого хода чётность количества чёрных клеток не меняется. Покажем, что не более, чем за 4 хода можно покрасить в чёрный цвет первый столбец. Если в первом столбце две верхние клетки белого цвета, перекрашиваем их. Если только одна, то перекрашиваем её вместе с соседней клеткой из второго столбца. Итак, на получение двух чёрных клеток потребовалось не более одного хода. Аналогично, по две за ход, красим остальные клетки первого столбца. То же проделываем со следующими столбцами, и не более чем за 28 ходов станут чёрными все клетки семи первых столбцов. Последний столбец красим сверху вниз, начиная с верхней белой клетки, на что понадобится не более 7 ходов.

5. Рассмотрим все 9-значные числа, получающиеся перестановками цифр от 1 до 9. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма трёх таких чисел?

Ответ: на 8.

Решение. *Оценка*. Каждое из таких чисел делится на 9, их сумма меньше 3 000 000 000, поэтому 9 нулей быть не может.

Пример. 423 657 819 + 234 576 198 + 241 765 983 = 900 000 000.

6. Существует ли такое натуральное число, у которого при умножении на 3 сумма цифр уменьшается ровно в 6 раз?

Ответ: да.

Решение. *Пример*. 566666667. Сумма цифр 54, а сумма цифр результата 1700000001 равна 9.

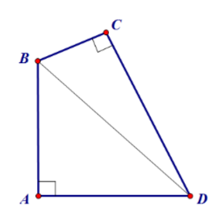
Турнир математических боёв № 3 В

1. Виталий вел дневник наблюдений за погодой. Оказалось, что в последний день наблюдений количество дождливых дней составляло n% прошедших с начала наблюдений, хотя на день раньше дождливых дней было $(n - 1)$% от наблюдаемых дней к тому моменту. (n – натуральное число). Какое наименьшее количество дней вел дневник Виталий?

Ответ: 25.

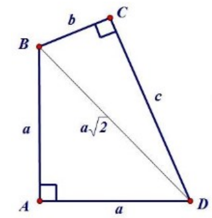
Решение. Пусть Виталий наблюдал за погодой k дней. Тогда дождливых дней было $\frac{kn}{100}$. А днем ранее дождливых дней было $\frac{(k-1)(n-1)}{100} < \frac{kn}{100}$. Следовательно, $\frac{kn}{100} - \frac{(k-1)(n-1)}{100} = 1.$ Тогда $k = 101 - n$. Поскольку kn делится на 100, получаем, что $n(101 - n)$ делится на 100. Тогда $n(1 - n)$ делится на сто. Но числа n и $n - 1$ взаимно просты, поэтому одно из них делится на 25. Таким образом, $n \geq 25$ и $n = 25$ подходит.

2. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = AD$, углы A и C – прямые. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC + CD = 12$.



Ответ: 36.

Решение. Обозначим $AB = AD = a$, $BC = b$, $CD = c$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2}$. Так как $b + c = 12$, то $b^2 + c^2 + 2bc = 144$. По теореме Пифагора $b^2 + c^2 = 2a^2$, то есть $2a^2 + 2bc = 4 \cdot 36$,
$S_{ABCD} = 36$.



3. Известно, что $a^3 + b^3 = a - b$, где $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $a^2 + b^2 < 1$.

Решение. Из условия следует, что $a - b = a^3 + b^3 > 0$, то есть $a > b$. Далее, $a - b = a^3 + b^3 > a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Отсюда $a^2 + b^2 < a^2 + ab + b^2 < 1$.

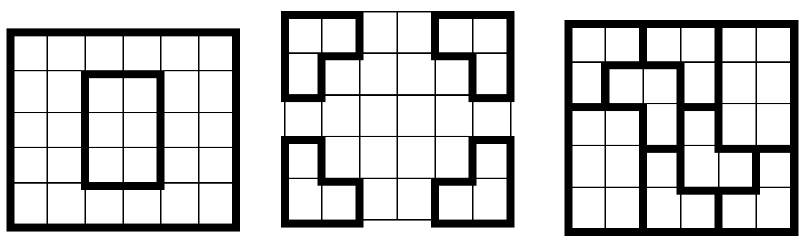
4. Квадратная таблица 8×8 заполнена числами от 1 до 64, каждое число использовано по одному разу. Докажите, что найдутся хотя бы четыре квадратика 2×2, в каждом из которых сумма чисел не меньше 100. Квадратики могут накладываться друг на друга.

Решение. Предположим, что это не так, т.е. квадратиков с суммой чисел не меньше 100 не более трёх штук. Сумма всех чисел в таблице равна $65 \times 32 = 2080$. Разрежем таблицу на 16 квадратиков 2×2. Пусть квадратиков 2×2 с суммой чисел, не меньшей 100, x штук, $x \leq 3$. Сумма в каждом не более, чем $64 + 63 + 62 + 61 = 250$, а во всех не более, чем $250x$. Сумма чисел в остальных не менее, чем $2080 - 250x$. С другой стороны, сумма в каждом из оставшихся $16 - x$ квадратиках меньше 100, а во всех вместе меньше чем $1600 - 100x$, т.е. $1600 - 100x > 2080 - 250x$ или $150x > 480$ откуда $x > 3$. Противоречие.

5. Клетчатый прямоугольник 5×6 разрезали на прямоугольники 2×3 и уголки из трёх клеток так, что никакие два уголка не образуют прямоугольник 2×3. Какое наименьшее число прямоугольников 2×3 могло быть использовано?

Ответ: 2.

Решение. *Оценка*. Докажем, что меньше 2 прямоугольников не получится. Если такой прямоугольник один, то он может быть расположен или вплотную к одной из сторон или как показано на первом рисунке. Иначе вдоль одной из длинных сторон нельзя поставить уголок (если ширина полоски до края равна 1). Но при таком расположении любой уголок, примыкающий к вершине прямоугольника делает невозможным покрытие соответствующей угловой клетки доски. Если расположен вплотную к одной из сторон – перебор случаев. Если же прямоугольников вообще нет, то уголки, покрывающие угловые клетки доски делают невозможным покрытие центральной клетки короткой стороны. *Пример*. На третьем рисунке.



6. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют условию НОД$(2a + b;\ 2c + d) = 2023$. Докажите, что $ad - bc$ делится на 2023.

Решение. $a(2c + d) - c(2a + b)$ делится на 2023. Значит, $ad - bc$ делится на 2023.

Турнир математических боёв № 3 С

1. В клетках таблицы 9×9 расставлены целые ненулевые числа. Докажите, что можно сменить знак у не более чем 40 чисел так, чтобы каждое из чисел отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).

Решение. Достаточно сделать положительными все числа на чёрных клетках и отрицательными все числа на белых клетках при шахматной раскраске доски или наоборот. В одном из случаев потребуется не более 40 замен.

2. Даны четыре натуральных числа. Для каждой пары чисел посчитали их наибольшие общие делители, в результате получились числа 2, 3, 4, 5, 6 и 9. Какова наименьшая возможная сумма этих чисел?

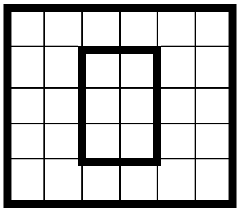
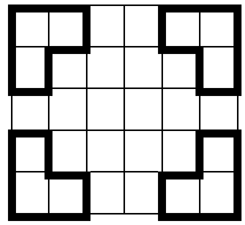
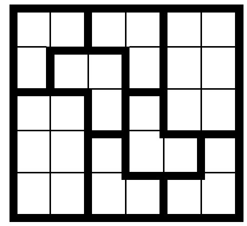
Ответ: 95.

Решение. *Пример*. 12, 18, 20 и 45. *Оценка*. Ясно, что одно из чисел нечетное (для определенности a), а остальные три – четные. Обозначим их так, что НОД$(a; b) = 3$, НОД$(a; c) = 5$ и НОД$(a; d) = 9$. Тогда a делится на 45, и, значит, $a \geq 45$. Кроме того b делится на 6, c делится на 10 и d делится на 18. Тогда НОД$(b; d)$ делится на 6 и, значит, он равен 6. Следовательно, оставшиеся два НОДа равны 2 и 4. Если $(b; c) = 4$, то b делится на 12 и, значит, $b \geq 12$, а c делится на 20, значит, $c \geq 20$. Тогда $a + b + c + d \geq 45 + 12 + 20 + 18 = 95$. Если НОД$(c; d) = 4$, то c делится на 20 и, значит, $c \geq 20$, а d делится на 36, значит, $d \geq 36$. Тогда $a + b + c + d \geq 45 + 6 + 20 + 36 = 107 > 95$.

3. Клетчатый прямоугольник 5×6 разрезали на прямоугольники 2×3 и уголки из трёх клеток так, что никакие два уголка не образуют прямоугольник 2×3. Какое наименьшее число прямоугольников 2×3 могло быть использовано?

Ответ: 2.

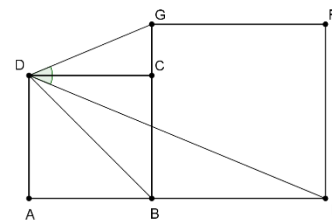
Решение. *Оценка*. Докажем, что меньше 2 прямоугольников не получится. Если такой прямоугольник один, то он может быть расположен или вплотную к одной из сторон или как показано на первом рисунке. Иначе вдоль одной из длинных сторон нельзя поставить уголок (если ширина полоски до края равна 1). Но при таком расположении любой уголок, примыкающий к вершине прямоугольника делает невозможным покрытие соответствующей угловой клетки доски. Если расположен вплотную к одной из сторон – перебор случаев. Если же прямоугольников вообще нет, то уголки, покрывающие угловые клетки доски делают невозможным покрытие центральной клетки короткой стороны. *Пример*. На третьем рисунке.

4. Можно ли отметить 5 точек в вершинах клеток шахматной доски 8 × 8 так, чтобы расстояния между любыми двумя отмеченными точками было целым (на одной прямой не более трёх точек)?

Ответ: да. Пример: расположим шахматную доску в системе координат так, чтобы она лежала в первой четверти и один из углов доски размещался в начале координат. Отметим точки (1; 0), (4; 4), (7; 0), (1; 8), (7; 8).

5. Площадь большого квадрата на рисунке в два раза больше площади маленького квадрата. Найдите величину угла, отмеченного на рисунке.



Ответ: 45°.

Решение. $BD = BG = BE$ (из-за условия на площади). Тогда треугольники DBG, DBE – равнобедренные, $\angle DBE = 90° + 45° = 135°$. $\angle BDE = 22{,}5°$. $\angle DBG = 45°$, $\angle BDG = 67{,}5°$. $\angle GDE = 67{,}5° – 22{,}5° = 45°$.

6. Существуют ли различные целые числа x и y такие, что числа $\frac{x^2+x}{y^2+y}$ и $\frac{x^2+2}{y^2+2}$ также целые и равны друг другу?

Ответ: существуют. Подходят $x = –4$ и $y = 1$ или $x = 8$ и $y = 3$.

Решение. Знаменатели дробей не могут обращаться в ноль, поэтому $y \neq –1$. Если $\frac{x^2+x}{y^2+y} = \frac{x^2+2}{y^2+2}$, то $(xy – 2x – 2y – 2)(x – y) = 0$, откуда $(x – 2)(y – 2) = 6$ и у нас есть четыре варианта $x = 8$ и $y = 3$, $x = 5$ и $y = 4$, $x = –4$ и $y = 1$ ($x = 0$ и $y = –1$ отбрасываем). В первом и третьем случае $\frac{x^2+x}{y^2+y} = \frac{x^2+2}{y^2+2} = 6$, в о втором – числа нецелые.