ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
БАЙКАЛЬСКОГО МЕЖРЕГИОНАЛЬНОГО ТУРНИРА 2023
Конкурс «Математический фейерверк»

ЗАДАНИЯ 1 ТУРА:

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2023 год
5-6 классы

1. Разрежьте клетчатый квадрат размером 13×13 на 12 квадратов так, чтобы все разрезы проходили по сторонам клеточек.
2. Можно ли на шахматную доску 8 × 8 поставить 16 не бьющих друг друга королей так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло по 2 короля? Ответ надо обосновать.
3. Дано 8 трёхзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два и записать их подряд таким образом, что получившееся шестизначное число будет делиться на 7.
4. Произведение десяти последовательных натуральных чисел заканчивается четырьмя нулями. Докажите, что произведение каких-то трёх из этих чисел тоже заканчивается четырьмя нулями.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2023 год
7 класс

1. Если подряд написать возраст Марии, а потом возраст Василия (оба – двузначные), получится четырёхзначный точный квадрат. Василий обнаружил, что через 13 лет тоже будет четырёхзначный точный квадрат. Сколько лет Василию? Ответ надо обосновать.
2. Для любых чисел x и y докажите неравенство $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.
3. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101. Ответ надо обосновать.
4. В квадрате $ABCD$ на стороне CD выбрана точка M так, что угол MBC равен 20°. Внутри четырёхугольника $ABMD$ выбрана точка K так, что $KM = KD$, BK перпендикулярно KM. Найдите угол ADK. Ответ надо обосновать.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2023 год
8 класс

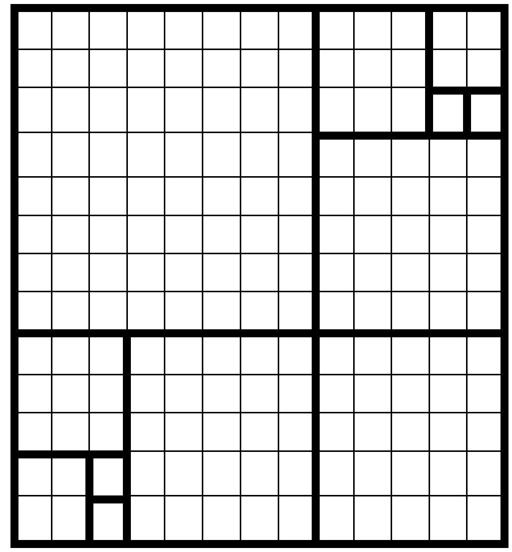
1. Если подряд написать возраст Марии, а потом возраст Василия (оба – двузначные), получится четырёхзначный точный квадрат. Василий обнаружил, что через 13 лет тоже будет четырёхзначный точный квадрат. Сколько лет Василию? Ответ надо обосновать.
2. Для любых чисел x и y докажите неравенство $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.
3. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101. Ответ надо обосновать.
4. В треугольнике ABC угол B равен 120°, $BC = 2AB$. Найдите величину острого угла между медианами треугольника AK и BP. Ответ надо обосновать.

РЕШЕНИЯ:

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2023 год

5-6 классы

1. Разрежьте клетчатый квадрат размером 13×13 на 12 квадратов так, чтобы все разрезы проходили по сторонам клеточек.



<u>Решение.</u> Разрезание на рисунке (возможны другие примеры).
<u>Критерии.</u> Любой верный пример – 7 баллов.

2. Можно ли на шахматную доску 8 × 8 поставить 16 не бьющих друг друга королей так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло по 2 короля? Ответ надо обосновать.

	к		к				
					к		к
	к		к				
					к		к
к		к					
				к		к	
к		к					
				к		к	

<u>Ответ:</u> Да.
<u>Решение.</u> Пример на рисунке (возможны другие примеры).
<u>Критерии.</u> Любой верный пример – 7 баллов.

3. Дано восемь трёхзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два и записать их подряд таким образом, что получившееся шестизначное число будет делиться на 7.

<u>Решение.</u> Всего существует 7 различных остатков от деления на 7, а чисел 8. Значит, найдутся два числа, дающих одинаковый остаток от деления на 7. Запишем их подряд. Пусть эти числа $\overline{abc}$ и $\overline{def}$. Тогда число $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1001\overline{abc} + \left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$. Первое слагаемое делится на 7 т.к. 1001 делится на 7, и второе делится на 7, т.к. числа дают одинаковые остатки при делении на 7, значит, число $\overline{abcdef}$ делится на 7.
<u>Критерии.</u> Любое количество примеров – 0 баллов. Доказано, что найдутся два числа, дающие одинаковые остатки от деления на 7 – 2 балла. Доказано, что такие два числа найдутся, если найдутся два числа с одинаковым остатком от деления на 7, но последнее утверждение не доказано – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

4. Произведение десяти последовательных натуральных чисел заканчивается четырьмя нулями. Докажите, что произведение каких-то трёх из этих чисел тоже заканчивается четырьмя нулями.

<u>Решение.</u> Среди 10 последовательных натуральных чисел ровно два числа кратны 5, причем одно из них чётно. Выберем эти два числа a и b. Так как все произведение S кратно 5^4, то произведение ab кратно 5^4 и кратно 2. Также среди 10 последовательных чисел обязательно есть число, кратное 8. Если это не a и не b, то выберем это число c. Тогда abc кратно $2^4 \cdot 5^4$, а значит, оканчивается четырьмя нулями. Если это одно из чисел a или b, то ab уже кратно $2^3 \cdot 5^4$, тогда выберем в качестве третьего числа любое четное из оставшихся и получим требуемое.
<u>Критерии.</u> Любое количество примеров – 0 баллов. Если доказана только делимость на 5^4 – 3 балла. Если не рассмотрен один из случаев делимости на 8 – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.

5. Если подряд написать возраст Марии, а потом возраст Василия (оба – двузначные), получится четырёхзначный точный квадрат. Василий обнаружил, что через 13 лет тоже будет четырёхзначный точный квадрат. Сколько лет Василию? Ответ надо обосновать.

Ответ: 36 лет.

Решение. Пусть полученное четырёхзначное число равно x^2, а второе число, получающееся добавлением 1313, равно y^2. Тогда $y^2 - x^2 = 1313$. $(y - x)(y + x) = 13 \cdot 101$. Тогда возможны два варианта: $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 1313 \end{cases}$ и $\begin{cases} y - x = 13 \\ y + x = 101 \end{cases}$. В первом варианте $x = 656$ и x^2 – не четырёхзначное. Во втором варианте $x = 44$, $x^2 = 1936$, значит, Василию 36 лет.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Составлено уравнение – 1 балл. Баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

6. Для любых чисел x и y докажите неравенство $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.

Решение. Способ 1. Пусть $xy \geq 0$. Тогда $(x - 1)^2 + xy + (y - 1)^2 \geq 0$, откуда $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.
Пусть $xy < 0$. Будем считать без ограничения общности (переменные входят в неравенство симметрично), что $x > 0$, $y < 0$. Тогда $0{,}5(x + y)^2 + 0{,}5(x - 2)^2 + 0{,}5y^2 - 2y > 0$, откуда получаем $x^2 + y^2 + xy + 2 > 2(x + y)$. Неравенство доказано.

Способ 2. Рассмотрим удвоенную разность левой и правой части:
$2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2 \geq 0$. Тогда $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.

Критерии. Любое количество примеров – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

7. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101. Ответ надо обосновать.

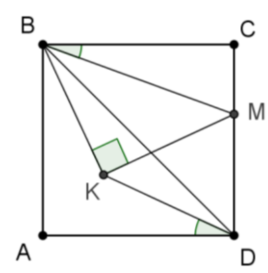
Ответ: 51.

Решение. **Оценка.** Рассмотрим сумму всех чисел от k до m, где $1 \leq k \leq m \leq 50$. Она равна $(k + m)(m - k + 1)/2$. При этом оба сомножителя в числителе не делятся на 101, так как они меньше 101. Поскольку 101 – простое число, не делится на 101 и их произведение. Таким образом, $n \leq 50$ не годится, то есть $n \geq 51$. **Пример** Покажем, что 51 обладает указанным свойством. Заменим каждое число на его остаток от деления на 101. Если есть число, имеющее остаток 0, то можно выбрать одно это число. Если же остатка 0 нет, то мы получим 51 последовательное число от 1 до 100. В любом таком наборе чисел встретятся числа 50 и 51. Сумма чисел с данными остатками будет делиться на 101.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

8. В квадрате $ABCD$ на стороне CD выбрана точка M так, что угол MBC равен 20°. Внутри четырёхугольника $ABMD$ выбрана точка K так, что $KM = KD$, BK перпендикулярно KM. Найдите угол ADK. Ответ надо обосновать.

Ответ: 25°, 45°.



Решение. $\angle BMC = 180° - 90° - 20° = 70°$. Пусть $\angle ADK = \alpha$. Тогда $\angle KDM = \angle KMD = 90° - \alpha$ (т.к. треугольник KDM – равнобедренный). Отсюда $\angle KMB = 180° - 70° - (90° - \alpha) = 20° + \alpha$, $\angle KBM = 180° - 90° - (20° + \alpha) = 70° - \alpha$, $\angle ABK = 90° - 20° - (70° - \alpha) = \alpha$.
Рассмотрим случай, когда точка K не на диагонали BD. Тогда треугольник BKD – равнобедренный, так как $\angle KBD = \angle KDB = 45° - \alpha$. Значит, $BK = KD = KM$. Тогда треугольник BKM – равнобедренный, $\angle KMB = 20° + \alpha = 45°$, т. е. $\alpha = 25°$.
Если точка K расположена на диагонали BD, то $\alpha = 45°$.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Выражение всех углов через α без дальнейшего продвижения – 1 балл. Если найден только один угол – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2023 год
8 класс

1. Если подряд написать возраст Марии, а потом возраст Василия (оба – двузначные), получится четырёхзначный точный квадрат. Василий обнаружил, что через 13 лет тоже будет четырёхзначный точный квадрат. Сколько лет Василию? Ответ надо обосновать.

Ответ: 36 лет.

Решение. Пусть полученное четырёхзначное число равно x^2, а второе число, получающееся добавлением 1313, равно y^2. Тогда $y^2 - x^2 = 1313$. $(y - x)(y + x) = 13 \cdot 101$. Тогда возможны два варианта: $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 1313 \end{cases}$ и $\begin{cases} y - x = 13 \\ y + x = 101 \end{cases}$. В первом варианте $x = 656$ и x^2 – не четырёхзначное. Во втором варианте $x = 44$, $x^2 = 1936$, значит, Василию 36 лет.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Составлено уравнение – 1 балл. Баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

2. Для любых чисел x и y докажите неравенство $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.

Решение. Способ 1. Пусть $xy \geq 0$. Тогда $(x - 1)^2 + xy + (y - 1)^2 \geq 0$, откуда $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$. Пусть $xy < 0$. Будем считать без ограничения общности (переменные входят в неравенство симметрично), что $x > 0$, $y < 0$. Тогда $0{,}5(x + y)^2 + 0{,}5(x - 2)^2 + 0{,}5y^2 - 2y > 0$, откуда получаем $x^2 + y^2 + xy + 2 > 2(x + y)$. Неравенство доказано.

Способ 2. Рассмотрим удвоенную разность левой и правой части:
$2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2 \geq 0$. Тогда $x^2 + y^2 + xy + 2 \geq 2(x + y)$.

Критерии. Любое количество примеров – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

3. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101. Ответ надо обосновать.

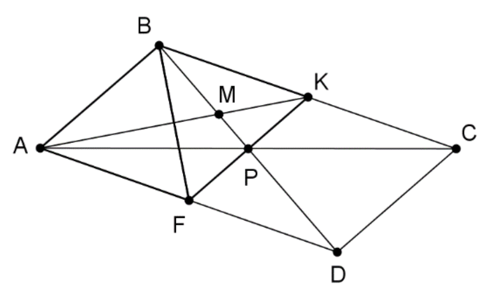
Ответ: 51.

Решение. **Оценка.** Рассмотрим сумму всех чисел от k до m, где $1 \leq k \leq m \leq 50$. Она равна $(k + m)(m - k + 1)/2$. При этом оба сомножителя в числителе не делятся на 101, так как они меньше 101. Поскольку 101 – простое число, не делится на 101 и их произведение. Таким образом, $n \leq 50$ не годится, то есть $n \geq 51$. **Пример** Покажем, что 51 обладает указанным свойством. Заменим каждое число на его остаток от деления на 101. Если есть число, имеющее остаток 0, то можно выбрать одно это число. Если же остатка 0 нет, то мы получим 51 последовательное число от 1 до 100. В любом таком наборе чисел встретятся числа 50 и 51. Сумма чисел с данными остатками будет делиться на 101.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

9. В треугольнике ABC угол B равен 120°, $BC = 2AB$. Найдите величину острого угла между медианами треугольника AK и BP. Ответ надо обосновать.

Ответ: 60°.



Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, удваивая медиану BP. Проводим KP до пересечения с AD в точке F. Пусть $AB = a$, тогда $BK = KC = a$, из равенства треугольников BPK и DPF получаем $FD = a$, $AF = AD - FD = a$. Тогда $ABKF$ – ромб, с углами 60° и 120°, KA – диагональ и биссектриса угла BKF, значит, $\angle BKM = 30°$. Треугольник BKF – равносторонний, BP – медиана, значит, биссектриса угла KBF, $\angle KBM = 30°$. Тогда $\angle BMK = 120°$, $\angle AMB = 60°$.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Идея дополнительного построения параллелограмма – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.